Exercice 1 (eml 2022)

Partie A

1)$X(\Omega) = \mathbf{N}$ et $Y = X + 1$ donc $Y(\Omega) = \mathbf{N}^*$.
$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(Y = k) = P(X = k - 1) = q^{k-1}p$.
On conclut que $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

2)Le cours donne : $E(Y) = \dfrac{1}{p}$ et $V(Y) = \dfrac{q}{p^2}$.

On déduit : $E(X) = E(Y - 1) = E(Y) - 1 = \dfrac{1}{p} - 1 = \dfrac{1-p}{p} = \dfrac{q}{p}$.

$V(X) = V(Y - 1) = V(Y) = \dfrac{q}{p^2}$.

3)Programme :

```
def simule_X(p):
    Y=1
    while rd.random()>p:
        Y=Y+1
    X=Y-1
    return X
```

Partie B

4)Programme :

```
def simule_Z(n,p):
    Z=1
    for i in range(n):
        s=0
        for j in range(Z):
            s=s+simule_X(p)
        Z=s
    return Z
```

5)a)$u_0 = P(Z_0 = 0) = 0$ car Z_0 est certaine et égale à 1.

$u_1 = P(Z_1 = 0) = P(X = 0) = p$ (en effet, Z_1 et X ont la même loi).

b)Supposons l'événement $(Z_n = 0)$ est réalisé.
Cela signifie qu'après la n-ème activation, le joueur n'a plus de jeton.
A la $n + 1$-ème activation, le joueur ne peut donc pas introduire de jeton dans la machine. Après la $n + 1$-ème activation, la machine ne rend rien au joueur qui reste toujours sans jeton et l'événement $(Z_{n+1} = 0)$ est réalisé.

On a donc : $(Z_n = 0) \subset (Z_{n+1} = 0)$.

Par croissance de la probabilité, on déduit : $P(Z_n = 0) \leq P(Z_{n+1} = 0)$, c'est-à-dire : $u_n \leq u_{n+1}$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.

En tant que probabilité, on a $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leq 1$.

D'après le théorème de la limite monontone, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

6)L'événement R est réalisé si et seulement si l'un au moins des événements $(Z_n = 0)$ est réalisé.

Ainsi, $R = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} (Z_n = 0)$.

La suite d'événements $\big((Z_n = 0)\big)_{n\geq 1}$ étant croissante pour l'inclusion, le théorème de la limite monotone s'applique et donne :

$$P(R) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (Z_n = 0)\right) = \lim_{n\to+\infty} P(Z_n = 0) = \lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

7)a)Supposons l'événement $(Z_1 = k)$ réalisé.
Alors, la machine rend k jetons au joueur après la 1ère activation.
Ces k jetons sont remis dans la machine par le joueur, lors de la 2ème activation.
L'événement $(Z_2 = 0)$ est alors réalisé si la machine ne reverse aucun jeton au joueur.

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi, } P_{(Z_1=k)}(Z_2 = 0) &= P\left(X_1 + \cdots + X_k = 0\right) \\
&= P\big((X_1 = 0) \cap ... \cap (X_k = 0)\big) \quad \text{car } X_i \geq 0 \\
&= P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_k = 0) \quad \text{par indépendance} \\
&= P(X = 0) \times \cdots \times P(X = 0) \quad \text{car } X_i \text{ a même loi que } X \\
&= \big(P(X = 0)\big)^k \\
&= \big(P(Z_1 = 0)\big)^k \quad \text{car } X \text{ et } Z_1 \text{ ont même loi} \\
&= (u_1)^k.
\end{aligned}$$

b)Soit $n \in \mathbf{N}$.

• La formule des probabilités totales pour le sce $\big((Z_1 = k)\big)_{k\in\mathbf{N}}$ donne :

$$P\left(Z_{n+1} = 0\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\left(Z_1 = k\right) P_{(Z_1=k)}\left(Z_{n+1} = 0\right)$$

c'est-à-dire : $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P\left(Z_1 = k\right)\left(u_n\right)^k$.

• Comme $P\left(Z_1 = k\right) = P(X = k) = q^k p$, on déduit :

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k p\left(u_n\right)^k = p\sum_{k=0}^{+\infty} \left(qu_n\right)^k = p \times \frac{1}{1 - qu_n} = \frac{p}{1 - qu_n}.$$

Remarque

La série géométrique ci-dessus converge car $0 < q < 1$ et $0 \leq u_n \leq 1$, ce qui entraîne : $0 < qu_n < 1$.

8)a)Un passage à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité $u_{n+1} = \dfrac{p}{1 - qu_n}$ donne :

$l = \dfrac{p}{1 - ql}$.

Or, $(l-1)(ql-p)=0 \Longleftrightarrow ql^2-pl-ql+p=0$

$$\Longleftrightarrow ql^2-\underbrace{(p+q)}_{=1}l+p=0$$

$$\Longleftrightarrow l-ql^2=p$$

$$\Longleftrightarrow l(1-ql)=p$$

$$\Longleftrightarrow l=\frac{p}{1-ql}.$$

Donc $(l-1)(ql-p)=0$.

b)On suppose $p\geq \frac{1}{2}$. On a alors $q=1-p\leq \frac{1}{2}$, puis $\frac{1}{q}\geq\ 2$.

Par produit, $\frac{p}{q}\geq 1 \quad (*)$

Par ailleurs, l'égalité 8)a) donne $l-1=0$ ou $ql-p=0$, c'est-à-dire $l=1$ ou $l=\frac{p}{q}$.

La condition $l=\frac{p}{q}$ entraîne que $l\geq 1$ grâce à $(*)$.

Enfin, comme l est une probabilité, $l\leq 1$. D'où $l=1$.

D'après la question 6), on conclut que $P(R)=1$.

c)• u_n étant une probabilité, on a déjà $\forall n\in\mathbf{N},\ u_n\geq 0$.

On fait une récurrence pour montrer l'autre inégalité.

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_n\leq \frac{p}{q}$ ».

$\mathscr{P}(0)$ est vraie puisque $u_0=0$.

Soit $n\in\mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par HR, on a : $u_n\leq\frac{p}{q}$. On déduit successivement :

$qu_n\leq p$

$-p\leq -qu_n$

$1-p\leq 1-qu_n$

$\frac{1}{1-qu_n}\leq\frac{1}{1-p}$ par décroissance de $x\mapsto\frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$

$\frac{p}{1-qu_n}\leq\frac{p}{1-p}$, c'est-à-dire $u_{n+1}\leq\frac{p}{q}$.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n\in\mathbf{N},\ 0\leq u_n\leq\frac{p}{q}$.

• Un passage à la limite dans l'inégalité $u_n\leq\frac{p}{q}$ donne : $l\leq\frac{p}{q}\quad (1)$

Comme $p<\frac{1}{2}$, on a : $q=1-p>\frac{1}{2}$, puis $\frac{1}{q}<2$.

Par produit, $\frac{p}{q}<1\quad(2)$

En recollant (1) et (2), on a : $l<1$, c'est-à-dire $P(R)<1$.

d)Pour que la machine soit rentable, le casino préfère que les joueurs finissent par ne plus avoir de jeton. C'est ce qui se produit lorsque $P(R)=1$, c'est-à-dire $p\geq\frac{1}{2}$.

Partie C

9)• Soit $n \in \mathbf{N}$.
Supposons l'événement $(Z_n = 0)$ réalisé.
Cela signifie qu'après n activations, le joueur n'a plus de jeton.

Ce peut être :
− la première fois que cela se produit, auquel cas, $T = n$,
− au moins la deuxième fois que cela se produit, auquel cas $T < n$.

Dans tous les cas, l'événement $(T \leq n)$ est réalisé donc $(Z_n = 0) \subset (T \leq n)$.

Réciproquement, supposons l'événement $(T \leq n)$ réalisé.
Alors, T prend une valeur $k \in [\![1, n]\!]$.
Après k activations, le joueur n'a plus de jeton et reste dans cette situation jusqu'à la fin de la n-ème activation, ce qui réalise l'événement $(Z_n = 0)$.
Donc $(T \leq n) \subset (Z_n = 0)$.

On conclut que les événements $(T \leq n)$ et $(Z_n = 0)$ sont égaux.

On a donc $u_n = P(Z_n = 0) = P(T \leq n)$.

• Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
Comme T prend des valeurs entières, on a : $T \leq n \Longleftrightarrow T \leq n-1$ ou $T = n$.

Ainsi, l'événement $(T \leq n)$ est la réunion des événements incompatibles $(T \leq n-1)$ et $(T = n)$.

Donc $P(T \leq n) = P(T \leq n-1) + P(T = n)$, ce qui donne :

$u_n = u_{n-1} + P(T = n)$, soit $1 - v_n = 1 - v_{n-1} + P(T = n)$.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ P(T = n) = v_{n-1} - v_n$.

10)Les égalités ci-dessus donnent $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ nP(T = n) = nv_{n-1} - nv_n$.
En sommant ces égalités pour $n \in [\![1, N]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} nP(T=n) &= \sum_{n=1}^{N} (nv_{n-1} - nv_n) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \big((n-1)v_{n-1} - nv_n + v_{n-1}\big) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \big((n-1)v_{n-1} - nv_n\big) + \sum_{n=1}^{N} v_{n-1}
\end{aligned}$$

Par télescopage, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \big((n-1)v_{n-1} - nv_n\big) = 0v_0 - Nv_N = -Nv_N$.

En posant $i = n - 1$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_{n-1} = \sum_{i=0}^{N-1} v_i = \sum_{n=0}^{N-1} v_n$ en renommant i en n.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{N} nP(T=n) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - Nv_N$.

11)a)La question 7)b) avec $p = \dfrac{1}{2}$ donne : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}u_n} = \dfrac{1}{2 - u_n}$.

Ce qui incite à faire une récurrence...

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ ».

$\mathscr{P}(0)$ est vraie car $u_0 = 0$ d'après 5)a).

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2-u_n} \\ &= \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}} \quad \text{par HR} \\ &= \frac{1}{\frac{2(n+1)-n}{n+1}} \\ &= \frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

b)On déduit : $\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = 1 - u_n = 1 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

La question 10) donne alors pour tout $N \in \mathbf{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} nP(T=n) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} - \frac{N}{N+1} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} - \frac{N}{N+1}.$$

La série de terme général $\dfrac{1}{i}$ diverge (série harmonique) et elle est formée de termes positifs. Sa somme partielle tend donc vers $+\infty$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} = +\infty$.

De plus, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{N}{N+1} = 1$.

Par différence, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} nP(T=n) = +\infty$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} nP(T=n)$ est donc divergente. Ainsi, T n'a pas d'espérance.

12)a)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{1-u_{n+1}}{\frac{p}{q} - u_{n+1}} \\ &= \frac{1 - \frac{p}{1-qu_n}}{\frac{p}{q} - \frac{p}{1-qu_n}} \quad \text{d'après 7)b)} \\ &= \frac{\frac{1-qu_n-p}{1-qu_n}}{\frac{p(1-qu_n)-pq}{q(1-qu_n)}} \\ &= \frac{q(1-qu_n-p)}{p(1-qu_n)-pq} \\ &= \frac{q(1-p-qu_n)}{p(1-q-qu_n)} \end{aligned}$$

On poursuit le calcul en remarquant que $1-p=q$ et $1-q=p$, ce qui donne :

$w_{n+1}=\dfrac{q(q-qu_n)}{p(p-qu_n)}=\dfrac{q}{p}\times\dfrac{q(1-u_n)}{p-qu_n}=\dfrac{q}{p}\times\dfrac{1-u_n}{\frac{p-qu_n}{q}}=\dfrac{q}{p}\times\dfrac{1-u_n}{\frac{p}{q}-u_n}$.

Donc $\forall n\in\mathbf{N},\ w_{n+1}=\dfrac{q}{p}w_n$.

b)• La suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{q}{p}$.

Donc $\forall n\in\mathbf{N},\ w_n=w_0\left(\dfrac{q}{p}\right)^n=\dfrac{1-u_0}{\frac{p}{q}-u_0}\times\left(\dfrac{q}{p}\right)^n=\dfrac{q}{p}\times\left(\dfrac{q}{p}\right)^n=\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}$.

Par ailleurs, à partir de l'égalité $w_n=\dfrac{1-u_n}{\frac{p}{q}-u_n}$, on exprime u_n en fonction de w_n :

$$\begin{aligned}
w_n=\frac{1-u_n}{\frac{p}{q}-u_n} &\iff w_n\left(\frac{p}{q}-u_n\right)=1-u_n\\
&\iff \frac{p}{q}w_n-w_nu_n=1-u_n\\
&\iff u_n-w_nu_n=1-\frac{p}{q}w_n\\
&\iff u_n(1-w_n)=1-\frac{p}{q}w_n\\
&\iff u_n=\frac{1-\frac{p}{q}w_n}{1-w_n}
\end{aligned}$$

En remplaçant w_n par $\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}$, on déduit : $u_n=\dfrac{1-\frac{p}{q}w_n}{1-w_n}=\dfrac{1-\frac{p}{q}\times\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$

Ainsi, $\forall n\in\mathbf{N},\ u_n=\dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$.

• $\forall n\in\mathbf{N},\ u_n\leq 1$ donc $v_n\geq 0$.

De plus, comme $\dfrac{q}{p}>0$ on a : $1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}<1$, puis $\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}}>1$.

En multipliant membre à membre par $1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^n>0$, on a :

$\dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}>1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^n$, c'est-à-dire : $u_n>1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^n$, soit $v_n<\left(\dfrac{q}{p}\right)^n$.

On conclut que $\forall n\in\mathbf{N},\ 0\leq v_n\leq\left(\dfrac{q}{p}\right)^n$.

c)La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{q}{p}\right)^n$ est une série géométrique de paramètre $\dfrac{q}{p}$.

Elle converge car $0 < \dfrac{q}{p} < 1$ du fait que $p > \dfrac{1}{2}$.

On sait de plus que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq v_n \leq \left(\dfrac{q}{p}\right)^n$.

D'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geq 0} v_n$ converge.

De plus, on a : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{q}{p}\right)^n = \dfrac{1}{1-\frac{q}{p}}$ (1)

On a donc : $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=0}^{N-1} v_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ (2)

De plus, on a $\forall N \in \mathbf{N},\ 0 \leq N v_N \leq N \left(\dfrac{q}{p}\right)^N$.

$\lim\limits_{N \to +\infty} N \left(\dfrac{q}{p}\right)^N = 0$ par croissances comparées.

Par la propriété des gendarmes, on a : $\lim\limits_{N \to +\infty} N v_N = 0$ (3)

En utilisant la question 10, ainsi que les points (2) et (3), on conclut par passage à la limite quand $N \to +\infty$:

$\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} nP(T=n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

La série $\sum\limits_{n \geq 1} nP(T=n)$ est donc convergente (et même absolument convergente, puisque son terme général est positif), ce qui signifie que T admet une espérance.

Enfin, $E(T) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nP(T=n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n \leq \dfrac{1}{1-\frac{q}{p}}$, grâce à (1).

13)De façon à ne pas mettre de frein à l'espérance de T (= nombre moyen d'activations avec jetons), le casino a intérêt à ce que la quantité $\dfrac{1}{1-\frac{q}{p}}$ soit la plus grande possible, ce qui se produit si $\frac{q}{p} \approx 1$, c'est-à-dire $p \approx \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 (eml 2022)

1)a)Pour toutes matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned} tr(\lambda M + N) &= tr\begin{pmatrix} \lambda a + e & \lambda b + f \\ \lambda c + g & \lambda d + h \end{pmatrix} \\ &= \lambda a + e + \lambda d + h \\ &= \lambda(a+d) + (e+h) \\ &= \lambda tr(M) + tr(N). \end{aligned}$$

Donc tr est linéaire.

b)

$$\begin{aligned} Ker(tr) &= \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \mid tr(M) = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a = -d \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -d & b \\ c & d \end{pmatrix}, (b,c,d) \in \mathbf{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (b,c,d) \in \mathbf{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $Ker(tr)$.

Par ailleurs, cette famille est libre car pour tous réels b, c et d, on a :

$$b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -d & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff b = c = d = 0.$$

Ainsi, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $Ker(tr)$.

Donc $dim Ker(tr) = 3$.

2)On a clairement $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}), f(M) \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. Donc f est « endo ».

Pour toutes matrices M et N de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= (\lambda M + N) + tr(\lambda M + N)J \\ &= (\lambda M + N) + \big(\lambda tr(M) + tr(N)\big)J \quad \text{par linéarité de } tr \\ &= \lambda\big(M + tr(M)J\big) + \big(N + tr(N)J\big) \\ &= \lambda f(M) + f(N). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

On conclut que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

3)a)Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

$f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2 + e_3$

$f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_2$

$f(e_3) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e_3$

$f(e_4) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2e_2 + e_3 + e_4.$

Donc $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b)$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c)• Posons $P(X) = (X-1)^2$.
Alors, $P(A) = (A - I_4)^2 = 0$ donc P est un polynôme annulateur de A.

D'après le cours, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P.
Or, $P(x) = 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$. Donc 1 est l'unique racine de P.

Ainsi, $sp(A) \subset \{1\}$.

De plus, $A - I$ possède 2 colonnes nulles ainsi qu'une première et troisième colonne identiques (et non nulles). Donc $rg(A - I) = 1 < 4$, ce qui prouve que $A - I$ n'est pas inversible et que 1 est valeur propre de A.

On conclut que $sp(A) = \{1\}$.

• Supposons A diagonalisable. Alors, il existe P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1} \quad (*)$
D porte sur sa diagonale les valeurs propres de A, à savoir 1. Donc $D = I$.
En remplaçant dans $(*)$, on obtient : $A = PIP^{-1} = I$, ce qui est absurde.
Ainsi, A n'est pas diagonalisable.

Remarque
On peut aussi utiliser que $dimE_1(A) + rg(A - I) = 4$, ce qui donne $dimE_1(A) = 3$.
Et on conclut par le théorème de réduction.

d)L'égalité $(A - I_4)^2 = 0$ donne en développant :
$A^2 - 2A + I_4 = 0$, soit $A(A - 2I_4) = -I_4$, ou encore $A(2I_4 - A) = I_4$.

Donc A est inversible.

De plus, $A^{-1} = 2I_4 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4)QUESTION MODIFIEE !

a)$\bullet$ $M \in Ker(f-\mathrm{Id}) \iff (f-\mathrm{Id})(M)=0$

$$\begin{aligned}
&\iff f(M)-M=0\\
&\iff tr(M)J=0\\
&\iff tr(M)=0 \quad \text{car } J\neq 0\\
&\iff M\in \mathrm{Ker}\,(tr).
\end{aligned}$$

Donc $Ker(f-\mathrm{Id})=Ker(tr)$.

$\bullet$ Le théorème du rang donne : $dimKer(f-\mathrm{Id})+rg(f-\mathrm{Id})=dim\mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \quad (*)$

Or, on a les points suivants :

$dimKer(f-\mathrm{Id})=dimKer(tr)=3$ d'après 1)b),

$rg(f-\mathrm{Id})=rg(A-I_4)$ puisque $A-I_4=\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f-\mathrm{Id})$,

$dim\mathscr{M}_2(\mathbf{R})=4$.

En remplaçant dans $(*)$, on déduit : $rg(A-I_4)=1$.

$\bullet$ Enfin, on a : $dimE_1(A)+rg(A-I)=4$, d'où $dimE_1(A)=3$, ce qui prouve au passage que $E_1(A)$ est non nul et que 1 est valeur propre de A.

b)$f(J)=J+tr(J)J=\big(1+tr(J)\big)J=\mu J$.

On a donc $(f-\mu\mathrm{Id})J=0$, ce qui signifie que $J\in Ker\,(f-\mu\mathrm{Id})$.

J étant non nulle, cela prouve que $Ker\,(f-\mu\mathrm{Id})\neq\{0\}$.

Donc $f-\mu\mathrm{Id}$ n'est pas bijective. $A-\mu I_4$ étant la matrice de $f-\mu\mathrm{Id}$ dans la base $\mathscr{B}$, on peut conclure que $A-\mu I_4$ n'est pas inversible.

Ainsi, μ est valeur propre de A.

c)Pour toute $M\in\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, on a : $(f-\mathrm{Id})(M)=f(M)-M=tr(M)J$.

On déduit :

$$\begin{aligned}
(f-\mathrm{Id})^2(M)&=\big((f-\mathrm{Id})o(f-\mathrm{Id})\big)(M)\\
&=(f-\mathrm{Id})(tr(M)J)\\
&=tr(M)(f-\mathrm{Id})(J) \quad \text{car } f-\mathrm{Id} \text{ est linéaire}\\
&=tr(M)\big(f(J)-J\big)\\
&=tr(M)tr(J)J.
\end{aligned}$$

d)Pour toute $M\in\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, on a par la question précédente :

$(f-\mathrm{Id})^2\circ(f-\mu\mathrm{Id})(M)$

$=tr\big((f-\mu\mathrm{Id})(M)\big)tr(J)J$

$=tr\big(f(M)-\mu M\big)tr(J)J$

$=tr\big(M+tr(M)J-\mu M\big)tr(J)J$

$=tr\big(tr(M)J-tr(J)M\big)tr(J)J$

$=\big(tr(M)tr(J)-tr(J)tr(M)\big)tr(J)J \quad$ par linéarité de tr

$=0$.

Ainsi, $(f-\mathrm{Id})^2\circ(f-\mu\mathrm{Id})=0$.

e)D'après le cours, on a : $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}\big((f-\mathrm{Id})^2\big)=\big(\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f-\mathrm{Id})\big)^2=(A-I_4)^2$.

On a aussi $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f-\mu\mathrm{Id})=A-\mu I_4$.

Donc $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}\big((f-\mathrm{Id})^2 \circ (f-\mu\mathrm{Id})\big) = (A-I_4)^2(A-\mu I_4)$.

Comme $(f-\mathrm{Id})^2 \circ (f-\mu\mathrm{Id}) = 0$, on déduit que $(A-I_4)^2(A-\mu I_4) = 0$.

Posons $Q(X) = (X-1)^2(X-\mu)$. On a alors $Q(A) = (A-I_4)^2(A-\mu I_4) = 0$. Donc Q est un polynôme annulateur de A.

Les racines de Q sont 1 et μ donc $sp(A) \subset \{1, \mu\}$.
Or, d'après 4)a) et 4)b), les réels 1 et μ sont des valeurs propres de A.

Donc $sp(A) = \{1, \mu\}$.

f)Supposons $\mu \neq 1$, c'est-à-dire $tr(J) \neq 0$.
Alors, A admet deux valeurs propres distinctes 1 et μ, ainsi que deux sous-espaces propres associés $E_1(A)$ de dimension 3 (d'après 4)b)) et $E_\mu(A)$ de dimension supérieure ou égale à 1.
Comme $dimE_1(A) + dimE_\mu(A) \leq 4$, cela impose que $dimE_\mu(A) = 1$.
On a finalement : $dimE_1(A) + dimE_\mu(A) = 3 + 1 = 4$ avec $A \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$.
Donc A est diagonalisable, d'après le théorème de réduction.

Réciproquement, supposons A diagonalisable. Alors, $dimE_1(A) + dimE_\mu(A) = 4$, ce qui entraîne que $dimE_\mu(A) = 1$. On a alors $\mu \neq 1$ car sinon, $E_1(A)$ et $E_\mu(A)$ seraient égaux donc de même dimension.

On conclut que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}\,(J) \neq 0$.

g)On sait qu'une matrice est inversible si et seulement si aucune de ses valeurs propres n'est nulle.
Comme les valeurs propres de A sont 1 et μ, alors A est inversible si et seulement si $\mu \neq 0$.

On conclut que A est inversible si et seulement si $tr(J) \neq -1$.

Exercice 3

Partie A

1)f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ car elle coïncide sur ces intervalles avec la composée et le quotient de fonctions continues (dont le dénominateur ne s'annule pas).

Enfin, l'équivalent de cours $\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t$ associé au fait que $\lim\limits_{t \to 0} -t = 0$ donne :

$\ln(1-t) \underset{0}{\sim} -t$, puis $-\ln(1-t) \underset{0}{\sim} t$.

Cela entraîne que $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 1 = f(0)$, ce qui prouve la continuité de f en 0.

Ainsi, f est continue sur $]-\infty, 1[$.

2)a)Le signe de $\dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t)$ est indéterminé.

En effet, par exemple si $t \in [0, 1[$, on a : $\dfrac{t}{1-t} \geq 0$, mais $\ln(1-t) \leq 0$.

Etudions donc sur $]-\infty, 1[$ la fonction $g : t \mapsto \dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t)$.

g est dérivable sur $]-\infty, 1[$ comme somme et quotient de fonctions dérivables.

Pour tout réel $\forall t \in]-\infty, 1[$, on a :

$$g'(t) = \frac{1(1-t) - (-1) \times t}{(1-t)^2} + \frac{-1}{1-t} = \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{1-t} = \frac{1-(1-t)}{(1-t)^2} = \frac{t}{(1-t)^2}.$$

t	$-\infty$		0		1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Le tableau de variations donne $\forall t \in]-\infty, 1[,\ g(t) \geq 0$.

Ainsi, $\forall t \in]-\infty, 1[,\ \dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0$.

b)f est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ car elle coïncide sur ces intervalles avec la composée et le quotient de fonctions de classe C^1 (dont le dénominateur ne s'annule pas).

Pour tout réel $t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, on a :

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{1-t} \times t + \ln(1-t)}{t^2} = \frac{g(t)}{t^2}.$$

c)Des questions 2)b) et 2)c), on déduit : $\forall t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[,\ f'(t) \geq 0$.

Donc f est croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$.

Comme de plus, f est continue en 0, on peut conclure que f est croissante également sur $]-\infty, 1[$.

3)a)La fonction $h : t \mapsto \ln(1-t)$ est de classe C^2 au voisinage de 0. Elle admet donc un DL à l'ordre 2 en 0 donné par :

$h(t) \underset{0}{=} h(0) + h'(0)t + \dfrac{h''(0)}{2}t^2 + o(t^2)$.

$h(t) = \ln(1-t)$ donc $h(0) = 0$,

$h'(t) = \dfrac{-1}{1-t}$ donc $h'(0) = -1$,

$h''(t) = \dfrac{-1}{(1-t)^2}$ donc $h''(0) = -1$.

Ainsi, $\ln(1-t) \underset{0}{=} -t - \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^2)$.

b)Pour tout réel $t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, on a :

$\dfrac{f(t) - f(0)}{t} = \dfrac{\frac{-\ln(1-t)}{t} - 1}{t} = \dfrac{-\ln(1-t) - t}{t^2}$.

Or, grâce à 3)a), on a : $-\ln(1-t) - t \underset{0}{=} \dfrac{1}{2}t^2 - o(t^2) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}t^2$.

On déduit : $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{1}{2}$.

Cela prouve que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

c)Pour montrer que f est de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$, il faut établir que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et que f' est continue sur $]-\infty, 1[$.

- Le premier point est acquis puisque f est dérivable sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, 1[$ et qu'elle est dérivable en 0.
- Il reste à prouver le second point.

On sait que $\forall t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[,\ f'(t) = \dfrac{g(t)}{t^2}$.

f' est donc continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ comme quotient de deux fonctions continues.

Montrons maintenant que f' est continue en 0.

g est de classe C^2 au voisinage de 0, elle admet un DL d'ordre 2 en 0 donné par :

$g(t) \underset{0}{=} g(0) + g'(0)t + \dfrac{g''(0)}{2}t^2 + o(t^2)$.

$g(t) = \dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t)$ donc $g(0) = 0$,

$g'(t) = \dfrac{t}{(1-t)^2}$ donc $g'(0) = 0$,

$g''(t) = \dfrac{(1-t)^2 + 2(1-t)t}{(1-t)^4}$ donc $g''(0) = 1$.

Ainsi, $g(t) \underset{0}{=} \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^2) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}t^2$.

On déduit que $\displaystyle\lim_{t\to 0} f'(t) = \frac{1}{2}$. Or, d'après la question 3)b), on a : $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} f'(t) = f'(0)$, ce qui montre la continuité de f' en 0.

4)• Quand $t \to -\infty$, on a une FI du type « $\dfrac{-\infty}{-\infty}$ ».

Posons $x = 1 - t$ ou $t = 1 - x$. Quand $t \to -\infty$, $x \to +\infty$.

Donc $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{-\ln(1-t)}{t} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-\ln(x)}{1-x}$.

Or, $1 - x \underset{+\infty}{\sim} -x$ donc $\dfrac{-\ln(x)}{1-x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-\ln(x)}{1-x} = 0$.

On conclut que $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = 0$.

• $\lim\limits_{t \to 1}(1-t) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$. Par composée, $\lim\limits_{t \to 1} \ln(1-t) = -\infty$.

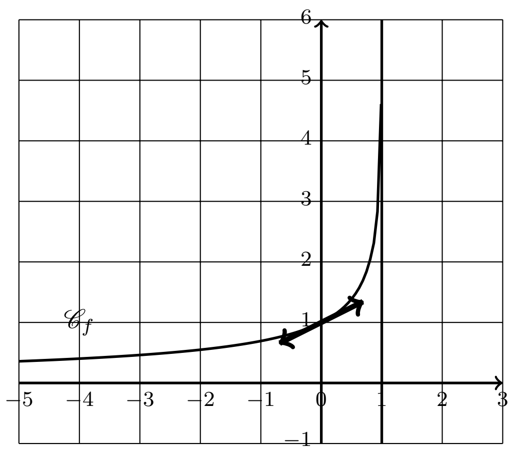
Donc $\lim\limits_{t \to 1} -\ln(1-t) = +\infty$.

Enfin, $\lim\limits_{t \to 1} t = 1$. Par quotient, $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{-\ln(1-t)}{t} = +\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{t \to 1} f(t) = +\infty$.

5)La tangente en 0 a pour coefficient directeur $f'(0) = 1/2$.

Il y a une asymptote verticale d'équation $x = 1$.



Partie B

6)f est continue sur $]-\infty,1[$. Donc L est une primitive de f sur $]-\infty,1[$.
L est donc dérivable sur $]-\infty,1[$ et $\forall x\in]-\infty,1[,\ L'(x)=f(x)$.
L' est alors continue sur $]-\infty,1[$. Ainsi, L est de classe C^1 sur $]-\infty,1[$.

7)a)Soient A et B deux réels de $]0,1[$.
Dans l'intégrale $\displaystyle\int_A^B f(t)dt=\int_A^B \frac{-\ln(1-t)}{t}dt$, posons $x=1-t$ ou $t=\underbrace{1-x}_{\varphi(x)}$.

- $t=A\Longleftrightarrow x=1-A$ et $t=B\Longleftrightarrow x=1-B$.
- $\dfrac{-\ln(1-t)}{t}=\dfrac{-\ln(x)}{1-x}$.
- $dt=\varphi'(x)dx=-dx$.

φ est de classe C^1 sur $[1-A,1-B]$. La formule du changement de variable est licite et donne :
$\displaystyle\int_A^B \frac{-\ln(1-t)}{t}dt=\int_{1-A}^{1-B}\frac{-\ln(x)}{1-x}(-dx)=\int_{1-B}^{1-A}\frac{-\ln(x)}{1-x}dx.$
En renommant la lettre t en x, on a bien finalement :

$$\int_A^B f(t)dt=\int_{1-B}^{1-A}\frac{-\ln(t)}{1-t}dt.$$

b)Pour tout $n\in\mathbf{N}$ et tout $t\in]0,1[$, on a :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}-t^k\ln t=-\ln t\times\sum_{k=0}^{n}t^k=-\ln t\times\frac{1-t^{n+1}}{1-t}.$
On déduit en remplaçant :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{n}-t^k\ln t\right)-\frac{t^{n+1}\ln t}{1-t}&=-\ln t\times\frac{1-t^{n+1}}{1-t}-\frac{t^{n+1}\ln t}{1-t}\\&=-\frac{\ln t}{1-t}\left(\left(1-t^{n+1}\right)+t^{n+1}\right)\\&=-\frac{\ln t}{1-t}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n\in\mathbf{N},\forall t\in]0,1[,\ \dfrac{-\ln(t)}{1-t}=\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}-t^k\ln t\right)-\dfrac{t^{n+1}\ln t}{1-t}$.

c)Pour tout $k\in\mathbf{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^k\ln t\ dt$ est impropre en 0.

Soit $x\in]0,1]$. Faisons une IPP sur $\displaystyle\int_x^1 -t^k\ln t\ dt$ en posant :

$u'(t)=-t^k\quad v(t)=\ln t$
$u(t)=-\dfrac{t^{k+1}}{k+1}\quad v'(t)=\dfrac{1}{t}$.

u et v sont de classe C^1 sur $[x,1]$. L'IPP est licite et donne :

$$\begin{aligned}\int_x^1 -t^k \ln t\; dt &= \left[-\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln t\right]_x^1 - \int_x^1 -\frac{t^{k+1}}{k+1}\times\frac{1}{t}dt\\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln x + \frac{1}{k+1}\int_x^1 t^k dt\\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln x + \frac{1}{k+1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_x^1\\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln x + \frac{1}{(k+1)^2}\left(1-x^{k+1}\right).\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{k+1}\ln x = 0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{k+1}}{k+1}\ln x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{k+1} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{(k+1)^2}\left(1-x^{k+1}\right) = \dfrac{1}{(k+1)^2}$.

Par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_x^1 -t^k\ln t\; dt = \dfrac{1}{(k+1)^2}$.

C'est une limite finie donc $\displaystyle\int_0^1 -t^k\ln t\; dt$ converge.

De plus, $\displaystyle\int_0^1 -t^k\ln t\; dt = \dfrac{1}{(k+1)^2}$.

d)• Soit $h : t\mapsto \dfrac{-t\ln t}{1-t}$.

$\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{t\to 0^+}(1-t) = 1$.
Par quotient, $\lim\limits_{t\to 0^+} h(t) = 0$.

$\ln t \underset{1}{\sim} t-1$ donc $\dfrac{-t\ln t}{1-t}\underset{1}{\sim} t$. Donc $\lim\limits_{t\to 1^-} h(t) = \lim\limits_{t\to 1^-} t = 1$.
h est continue sur $]0,1[$ comme produit et quotient de fonctions continues.
h admet une limite finie en 0 et en 1, elle est donc prolongeable par continuité.
Son prolongement par continuité est la la fonction $\tilde{h}$ définie sur $[0,1]$ par :

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} h(t) & \text{si } t\in]0,1[\\ 0 & \text{si } t=0\\ 1 & \text{si } t=1\end{cases}$$

$\tilde{h}$ est continue sur le segment $[0,1]$, elle est donc bornée. Donc h aussi.

• $h : t\mapsto \dfrac{-t\ln t}{1-t}$ est positive sur $]0,1[$ et majorée sur $]0,1[$. Il existe donc un réel M tel que $\forall t\in]0,1[,\ 0\leq \dfrac{-t\ln t}{1-t}\leq M$.
En multipliant membre à membre par $t^n\geq 0$, on déduit :

$\forall t\in]0,1[,\ 0\leq \dfrac{-t^{n+1}\ln t}{1-t}\leq Mt^n \quad (*)$

$\displaystyle\int_0^1 Mt^n dt$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^1 t^n dt$, intégrale convergente puisque $t\mapsto t^n$ est continue sur $[0,1]$.

D'après le critère de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln t}{1-t}dt$ converge.

En intégrant $(*)$ entre les bornes croissantes 0 et 1, on a :

$0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln t}{1-t}dt \leq \int_0^1 Mt^n dt,\quad$ avec $\displaystyle\int_0^1 Mt^n dt = \left[M\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{M}{n+1}$.

Donc $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln t}{1-t}dt \leq \frac{M}{n+1}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{n+1} = 0$. D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln t}{1-t}dt = 0$.

e)D'après la question 7)c), l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^k \ln t dt$ converge pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Par somme, $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} -t^k \ln t\right) dt$ converge.

On sait aussi d'après 7)d) que $\displaystyle\int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln t}{1-t}dt$ converge.

De la question **7)b)**, on déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t}dt$ converge.

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t}dt &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} -t^k \ln t\right) dt + \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln t}{1-t}dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 -t^k \ln t dt + \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln t}{1-t}dt \quad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln t}{1-t}dt \quad \text{d'après 7)c)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln t}{1-t}dt.
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln t}{1-t}dt = 0$ d'après 7)d).

Par somme, on conclut que $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t}dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

f)Soit $x \in]0,1[$.

La question 7)a) avec $A \in]0,1[$ et $B \to x$ donne :

$\displaystyle\int_A^x f(t)dt = \int_{1-x}^{1-A} \frac{-\ln(t)}{1-t}dt \quad (**)$

Les intégrales $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \int_{1-x}^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}dt$ convergent, on peut donc passer à la limite dans $(**)$ quand $A \to 0^+$, ce qui donne : $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \int_{1-x}^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}dt$, c'est-à-dire : $L(x) = \displaystyle\int_{1-x}^{1} \frac{-\ln(t)}{1-t} dt \quad (***)$

D'après 7)e), l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{-\ln(t)}{1-t} dt$ converge et vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Par passage à la limite dans $(***)$ quand $x \to 1^-$, on conclut :

$\displaystyle\lim_{x\to 1^-} L(x) = \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt = \frac{\pi^2}{6}$.

On déduit que L est prolongeable par continuité en 1 en posant $L(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

8)a)Posons $\mathbf{S} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{L(x) + L(-x)} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{L}\left(\mathbf{x^2}\right)$.

On sait d'après la question 6) que L est de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$ donc dérivable sur $]-\infty, 1[$ et $\forall x \in]-\infty, 1[,\ L'(x) = f(x)$.

• $x \mapsto -x$ est dérivable sur $]-1, 0[\cup]0, 1[$ et prend ses valeurs dans $]-1, 0[\cup]0, 1[$.
De plus, L est dérivable sur $]-1, 0[\cup]0, 1[$.
Par composée, $x \mapsto L(-x)$ est dérivable sur $]-1, 0[\cup]0, 1[$.

$x \mapsto x^2$ est dérivable sur $]-1, 0[\cup]0, 1[$ et prend ses valeurs dans $]0, 1[$. De plus, L est dérivable sur $]0, 1[$.
Par composée, $x \mapsto L(x^2)$ est dérivable sur $]-1, 0[\cup]0, 1[$.

Par combinaison linéaire de fonctions dérivables, S est dérivable sur $]-1, 0[\cup]0, 1[$.

• Pour tout $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} S'(x) &= L'(x) - L'(-x) - \frac{1}{2} \times (2x)L'(x^2) \quad \text{par dérivation d'une fonction composée} \\ &= f(x) - f(-x) - xf(x^2). \end{aligned}$$

Remarque

L'énoncé aurait pu demander de démontrer la dérivabilité de S sur $]-1, 1[$.
Pourquoi exclure zéro de l'intervalle, alors que L n'a aucun problème de dérivabilité en zéro ? Mystère.

On a donc $\forall x \in]0, 1[,\ S'(x) = f(x) - f(-x) - xf(x^2)$.

b)Pour tout $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - f(-x) - xf(x^2) &= -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} + x\frac{\ln(1-x^2)}{x^2} \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln\big((1-x)(1+x)\big)}{x} \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1+x)}{x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme $f(0) = 1$, l'égalité reste vraie en zéro.

La question 8)b) donne alors : $\forall x \in]-1, 1[,\ S'(x) = 0$. Donc S est constante sur $]-1, 1[$. Or, $S(0) = L(0) + L(0) - \dfrac{1}{2}L(0) = 0$ car $L(0) = 0$.

Donc $\forall x \in]-1, 1[,\ S(x) = 0$.

En passant à la limite quand $x \to -1^+$, on a : $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} S(x) = 0$, soit $S(-1) = 0$.

En passant à la limite quand $x \to 1^-$, on a : $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = 0$, soit $S(1) = 0$.

On conclut que $\forall x \in [-1, 1],\ S(x) = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in [-1, 1],\ L(x) + L(-x) = \frac{1}{2} L\left(x^2\right).$$

Remarque
Le fait que L soit continue en -1 et 1 entraîne la continuité de S en -1 et 1, on l'a utilisé pour pouvoir affirmer que $\lim\limits_{x\to -1^+} S(x) = S(-1)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = S(1)$.

c)L'égalité précédente pour $x = -1$ donne :

$L(-1) + L(1) = \frac{1}{2}L(1)$, soit $L(-1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{\pi^2}{12}$.

Partie C

On considère enfin la fonction Φ définie sur l'ouvert $]-\infty, 0[^2$ par :

$$\forall (x, y) \in]-\infty, 0[^2,\ \Phi(x, y) = L(x) + L(y) - L(-xy).$$

On admet que Φ est de classe C^2 sur $]-\infty, 0[^2$.

9)a)Pour tout $(x, y) \in]-\infty, 0[^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_1\Phi(x, y) &= L'(x) + 0 - \partial_1(-xy)L'(-xy)\\
&= L'(x) - (-y)L'(-xy)\\
&= L'(x) + yL'(-xy)\\
&= f(x) + yf(-xy).\\
\partial_2\Phi(x, y) &= 0 + L'(y) - \partial_2(-xy)L'(-xy)\\
&= L'(y) - (-x)L'(-xy)\\
&= L'(y) + xL'(-xy)\\
&= f(y) + xf(-xy).
\end{aligned}$$

b)Les points critiques de Φ sont les solutions sur $]-\infty, 0[^2$ du système :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_1\Phi(x, y) = 0\\ \partial_2\Phi(x, y) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) + yf(-xy) = 0\\ f(y) + xf(-xy) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} + y \times \left(-\dfrac{\ln(1+xy)}{-xy}\right) = 0\\ -\dfrac{\ln(1-y)}{y} + x \times \left(-\dfrac{\ln(1+xy)}{-xy}\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\ln(1-x) + \ln(1+xy) = 0\\ -\ln(1-y) + \ln(1+xy) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 - x = 1 + xy\\ 1 - y = 1 + xy \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 - x = 1 - y\\ 1 - y = 1 + xy \end{array}\right.$$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 1 - x = 1 + x^2 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x(x+1) = 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \quad \text{car } x \neq 0 \end{cases}$

Donc Φ admet $(-1,-1)$ comme unique point critique.

10)a)$\partial^2_{1,1}\Phi(x,y) = \partial_1\big(\partial_1\Phi(x,y)\big)$
$$= \partial_1\big(f(x) + yf(-xy)\big)$$
$$= f'(x) + y \times (-y) f'(-xy)$$
$$= f'(x) - y^2 f'(-xy).$$

$\partial^2_{2,1}\Phi(x,y) = \partial_2\big(\partial_1\Phi(x,y)\big)$
$$= \partial_2\big(f(x) + yf(-xy)\big)$$
$$= 0 + 1 \times f(-xy) + y \times (-x) f'(-xy)$$
$$= f(-xy) - xyf'(-xy).$$

Φ étant de classe C^2, d'après le théorème de Schwarz : $\partial^2_{1,2}\Phi(x,y) = \partial^2_{2,1}\Phi(x,y)$.

$\partial^2_{2,2}\Phi(x,y) = \partial_2\big(\partial_2\Phi(x,y)\big)$
$$= \partial_2\big(f(y) + xf(-xy)\big)$$
$$= f'(y) + x \times (-x) f'(-xy)$$
$$= f'(y) - x^2 f'(-xy).$$

On évalue ces dérivées seconde au point critique $(-1,-1)$:

$\partial^2_{1,1}\Phi(-1,-1) = f'(-1) - f'(-1) = 0,$

$\partial^2_{1,2}\Phi(-1,-1) = \partial^2_{2,1}\Phi(-1,-1) = f(-1) - f'(-1) = \ln 2 - \left(-\dfrac{1}{2} + \ln 2\right) = \dfrac{1}{2},$

$\partial^2_{2,2}\Phi(-1,-1) = f'(-1) - f'(-1) = 0.$

On conclut que la matrice hessienne de Φ au point $(-1,-1)$ est :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b)λ est valeur propre de H

$\Longleftrightarrow H - \lambda I$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow (-\lambda) \times (-\lambda) - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda^2 = \dfrac{1}{4}$

$\Longleftrightarrow \lambda = \pm\dfrac{1}{2}.$

11)Si Φ possède un extrémum local sur $]-\infty, 0[^2$, ce ne peut être qu'en un point critique donc en $(-1,-1)$. Or, les valeurs propres de H sont non nulles et de signes contraires donc H n'a pas d'extrémum local en $(-1,-1)$.