correction DM6

Exercice (inspiré d'edhec 2004)

1)a) $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to -\infty} e^t = 0$. Par composition, $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$.
Par produit, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$. Donc f est continue à droite en 0.

b)Pour tout $x \neq 0$, on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{xe^{-\frac{1}{x}} - 0}{x} = e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to 0}{\to} 0$.
Cette limite est finie donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.
2)a)$x \mapsto -\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et $t \mapsto e^t$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Par composition, $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$.
$x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$.
Par produit, f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et pour tout $x \neq 0$, on a :
$f'(x) = 1 \times e^{-\frac{1}{x}} + x \times \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = \dfrac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$.

b)• $\lim\limits_{x\to +\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} e^t = 1$. Par composition, $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$.
$\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
• $\lim\limits_{x\to -\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} e^t = 1$. Par composition, $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$.
$\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.
c) $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ est une FI du type « $0 \times +\infty$ ».
Posons $X = -\dfrac{1}{x}$ ou encore $x = -\dfrac{1}{X}$.
Quand $x \to 0^-$, $X \to +\infty$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0^-} xe^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to +\infty} -\dfrac{1}{X} e^X = \lim\limits_{X\to +\infty} -\dfrac{e^X}{X} = -\infty$ par croissances comparées.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

d)$f'(x)$ est du signe de $\dfrac{x+1}{x}$ donc aussi du signe du trinôme $(x+1)x$.
D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-e$	↘	$-\infty$ ‖ 0	↗	$+\infty$

3)a)Le cours donne : $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\epsilon(u)$ avec $\lim_{u\to 0}\epsilon(u) = 0$.

b)Comme $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$, on peut utiliser la question précédente avec $u = -\frac{1}{x}$:
$e^{-\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon\left(-\frac{1}{x}\right)$, puis $xe^{-\frac{1}{x}} = x - 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\epsilon\left(-\frac{1}{x}\right)$.
$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{u\to 0}\epsilon(u) = 0$.
Par composée, $\lim_{x\to+\infty}\epsilon\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ donc $\frac{1}{x}\epsilon\left(-\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Donc $\forall x \neq 0,\ f(x) \underset{+\infty}{=} x - 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

c)La question précédente donne : $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - (x-1)\big) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
Donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
De même en $-\infty$.
De plus, $f(x) - (x-1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.
Donc $f(x) - (x-1)$ est du signe de $\frac{1}{2x}$ quand $x \to +\infty$ donc positif.
Au voisinage de $+\infty$, $\mathscr{C}_f$ est donc au-dessus de D.
On a de même : $f(x) - (x-1) \underset{-\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.
Donc $f(x) - (x-1)$ est du signe de $\frac{1}{2x}$ quand $x \to -\infty$ donc négatif.
Au voisinage de $-\infty$, $\mathscr{C}_f$ est donc au-dessous de D.
d)