Correction DM2

Exercice 1 (extrait eml 2019)

1)f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

$\forall t>0, f'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{t^2-1}{t^2} = \dfrac{(t-1)(t+1)}{t^2}$ qui est du signe de $t-1$.

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{t\to 0^+} t = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = +\infty$.

$\lim\limits_{t\to +\infty} t = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to +\infty} \frac{1}{t} = 0$. Par somme, $\lim\limits_{t\to +\infty} f(t) = +\infty$.

2)f est continue sur $[1,+\infty[$ (car dérivable) et strictement croissante.
Donc f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $f([1,+\infty[) = [2,+\infty[$.

3)a)g a même variations que $f_{|[1,+\infty[}$. Donc g est strictement croissante sur $[2,+\infty[$.

y	2		$+\infty$
$g(y)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

b)f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et f' ne s'annule pas sur $]1,+\infty[$.
Donc g est dérivable sur $f(]1,+\infty[) =]2,+\infty[$.

En revanche, g n'est pas dérivable en 2 puisque $f'(1)=0$.

c)Soit $y \in [2,+\infty[$.

$f(t) = y \iff t + \frac{1}{t} = y \iff \frac{t^2+1}{t} = y \iff t^2+1 = ty \iff t^2 - yt + 1 = 0$.

C'est une équation du second degré en t, de discriminant $\Delta = y^2 - 4 \geq 0$ et de racines $t_1 = \frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$ et $t_2 = \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$.

Par construction de g, on a : $(f(t) = y \text{ et } t \geq 1) \iff t = g(y)$.

Ainsi, $g(y)$ doit être égal à celui des réels t_1 ou t_2 qui est supérieur ou égal à 1.

Or, $0 < t_1 \leq t_2$ et $t_1 t_2 = 1$ par produit des racines[1]. Donc $t_1 \leq 1 \leq t_2$.

On conclut que $\forall y \in [2,+\infty[, g(y) = \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$.

1. Pour l'équation $at^2+bt+c=0$, le produit des racines vaut c/a et la somme vaut $-b/a$

Exercice 2

1)$(x,y,z,t) \in Kerf \iff f(x,y,z,t) = (0,0)$

$$\iff \begin{cases} x + 2y - z + t &= 0 \\ 3x - y + z - t &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2y - z &= -x - t & L_1 \\ -y + z &= -3x + t & L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y &= -4x & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ z &= -7x + t & L_2 \end{cases}$$

Donc $Kerf = \left\{(x, -4x, -7x + t, t), (x,t) \in \mathbf{R}^2\right\}$
$= \left\{x(1,-4,-7,0) + t(0,0,1,1), (x,t) \in \mathbf{R}^2\right\}$
$= \text{Vect}\left((1,-4,-7,0), (0,0,1,1)\right)$.

Donc $\left((1,-4,-7,0), (0,0,1,1)\right)$ est une famille génératrice de $Kerf$.
De plus, c'est une famille libre car les vecteurs $(1,-4,-7,0)$ et $(0,0,1,1)$ ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de $Kerf$ et $dimKerf = 2$.

f n'est pas injective car $Kerf \neq \{(0,0,0,0)\}$.

2)$Imf = \left\{f(x,y,z,t), (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4\right\}$
$= \left\{(x + 2y - z + t, 3x - y + z - t), (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4\right\}$
$= \left\{x(1,3) + y(2,-1) + z(-1,1) + t(1,-1), (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4\right\}$
$= \text{Vect}\left((1,3), (2,-1), (-1,1), (1,-1)\right)$
$= \text{Vect}\left((2,-1), (1,-1)\right)$.

En effet, $(-1,1)$ et $(1,-1)$ sont proportionnels et $(1,3)$ est combinaison linéaire de $(2,-1)$ et $(-1,1)$ puisque $(1,3) = 4(2,-1) + 7(-1,1)$.

Donc $\left((2,-1), (1,-1)\right)$ est une famille génératrice de Imf. De plus, elle est libre car les vecteurs $(2,-1)$ et $(1,-1)$ ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de Imf et $dimImf = 2$.

Imf et $\mathbf{R}^2$ ont même dimension et $Imf \subset \mathbf{R}^2$. Donc $Imf = \mathbf{R}^2$.
Donc f est surjective.

3)Le théorème du rang s'écrit : $dim\mathbf{R}^4 = dimKerf + dimImf$.
Il est vérifié puisque $dim\mathbf{R}^4 = 4$ et $dimKerf = dimImf = 2$.