Correction Eml 2013

Exercice 1 (eml 2013)

Partie I

1)g est continue sur $]0,1]$ comme produit de fonctions continues.

De plus, $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t = 0$ par croissances comparées.

Donc $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = 0 = g(0)$, ce qui montre que g est continue à droite en 0.

On conclut que g est continue sur $[0,1]$.

2)Soit $x \in]0,1[$.

Effectuons une intégration par parties sur $\displaystyle\int_x^1 g(t)dt$ en posant :

$u'(t) = -t \qquad v(t) = \ln t$

$u(t) = -\dfrac{t^2}{2} \qquad v'(t) = \dfrac{1}{t}$.

u et v sont de classe C^1 sur $[x,1]$. L'IPP est valide et donne :

$$\begin{aligned}
\int_x^1 -t\ln t dt &= \left[-\frac{t^2}{2}\ln t\right]_x^1 - \int_x^1 -\frac{t^2}{2}\times\frac{1}{t}dt \\
&= 0 + \frac{x^2\ln x}{2} + \frac{1}{2}\int_x^1 t dt \\
&= \frac{x^2\ln x}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^1 \\
&= \frac{x^2\ln x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_x^1 g(t)dt = \frac{x^2\ln x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{4} = 0$.

La question 2) donne alors : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 g(t)dt = \frac{1}{4}$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{4}$.

Partie II

1)• f est continue sur $]-\infty,0]$ et $[1,+\infty[$ en tant que fonction nulle.

f est continue sur $]0,1[$ comme somme et produit de fonctions continues.

De plus, $\lim_{t\to 0^+} t\ln t = 0$ par croissances comparées et $\lim_{t\to 0^+} t^{1/3} = 0$.

Par somme, $\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0 = f(0)$. Donc f est continue à droite en 0.

f est continue à gauche en 0 (car f est continue sur $]-\infty, 0]$) et continue à droite en 0 donc continue en 0.

On conclut que f est continue sur $]-\infty, 1[$.

• $\lim_{t\to 1^+} f(t) = 0$ car f est nulle sur $]1, +\infty[$.

De plus, $\lim_{t\to 1^-} t\ln t = 0$ et $\lim_{t\to 1^-} t^{1/3} = 1$. Par somme, $\lim_{t\to 1^-} f(t) = 1$.

$\lim_{t\to 1^-} f(t) \neq \lim_{t\to 1^+} f(t)$ donc f n'est pas continue en 1.

2) $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ et $\int_{1}^{+\infty} f(t)dt$ convergent et valent 0 puisque f est nulle sur $]-\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$.

Enfin, on peut remarquer que $\forall t \in]0, 1[,\ f(t) = g(t) + t^{1/3}$.

$\int_0^1 g(t)dt$ converge d'après I.3) et $\int_0^1 t^{1/3}dt$ converge car la fonction $t \mapsto t^{1/3}$ est continue sur $[0, 1]$.

D'après la propriété de Chasles, $\int_0^1 f(t)dt$ converge et

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 g(t)dt + \int_0^1 t^{1/3}dt = \frac{1}{4} + \left[\frac{t^{4/3}}{4/3}\right]_0^1 = 1.$$

On conclut par Chasles de nouveau que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

De plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} f(t)dt = 1$.

3)• f est continue sur $\mathbf{R}$ sauf en 1

• $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1

• Pour $t \in]0, 1[$, on a : $\ln t < 0$ donc $-t\ln t > 0$ et $t^{1/3} > 0$.
Par somme, $\forall t \in]0, 1[,\ f(t) > 0$.
De plus, $\forall t \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[,\ f(t) = 0$.
On a finalement, $\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) \geq 0$.

Ces 3 points prouvent que f est une densité.

4)a)f est de classe C^2 sur $]0, 1[$ comme somme et produit de fonctions de classe C^2.

Pour tout $t \in]0, 1[$, on a :

$f'(t) = -\ln t - t \times \frac{1}{t} + \frac{1}{3}t^{-2/3} = -\ln t - 1 + \frac{1}{3}t^{-2/3}$ et $f''(t) = -\frac{1}{t} - \frac{2}{9}t^{-5/3}$.

b)• $\forall t \in]0,1[,\ f''(t) < 0$ donc f' est strictement décroissante sur $]0,1[$.
Par ailleurs, f' est continue sur $]0,1[$.
Donc f' réalise une bijection de $]0,1[$ sur $f'\big(]0,1[\big) = \left]\lim\limits_{t\to 1^-} f'(t), \lim\limits_{t\to 0^+} f'(t)\right[$.
$\lim\limits_{t\to 1^-} f'(t) = \lim\limits_{t\to 1^-} \left(-\ln t - 1 + \dfrac{1}{3}t^{-2/3}\right) = -\dfrac{2}{3}$.
$\lim\limits_{t\to 0^+} f'(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \left(-\ln t - 1 + \dfrac{1}{3}t^{-2/3}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{t\to 0^+} -\ln t = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{-2/3} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{t^{2/3}} = +\infty$.
Ainsi, f' est une bijection de $]0,1[$ sur $\left]-\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$.
$0 \in \left]-\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$ admet donc un unqiue antécédent $\alpha \in]0,1[$ par f, ce qui prouve que l'équation $f'(t) = 0$ a une unique solution $\alpha \in]0,1[$.
• $f'\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) - 1 + \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{e}\right)^{-2/3} = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{e}\right)^{-2/3} > 0$,
$f'(\alpha) = 0$,
$f'(1) = -\dfrac{2}{3} < 0$.
On a donc $f'(1) < f'(\alpha) < f'\left(\dfrac{1}{e}\right)$.
Par stricte décroissance de f' sur $]0,1[$, on conclut : $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$.
c)programme

```
import numpy as np
def fprime(t):
    y=-np.log(t)-1+t**(-2/3)/3
    return y
a=1/np.exp(1)
b=1
while b-a>10**-3:
    c=(a+b)/2
    if fprime(c)<0:
        b=c
    if fprime(c)>0:
        a=c
print(c)
```

Remarque
Python renvoie $\alpha \approx 0,59$.

Partie III

1)Soit $x \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}
\int_x^1 f(t)dt &= \int_x^1 \left(g(t)+t^{1/3}\right)dt \\
&= \int_x^1 g(t)dt + \int_x^1 t^{1/3}dt \\
&= \frac{x^2\ln x}{2}+\frac{1}{4}-\frac{x^2}{4}+\left[\frac{t^{4/3}}{4/3}\right]_x^1 \quad \text{d'après I.2)} \\
&= \frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{3}{4}x^{4/3}+1.
\end{aligned}$$

2)Par définition, on a : $\forall x\in\mathbf{R},\ F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)dt$.

• premier cas : $x\le 0$

f est nulle sur $]-\infty,0]$ donc sur $]-\infty,x]$. On a alors $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^x 0dt=0$.

• deuxième cas : $x\in]0,1[$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^0 f(t)dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^1 f(t)dt}_{=1} - \int_x^1 f(t)dt \quad \text{d'après } I.2) \\
&= -\frac{x^2\ln x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{3}{4}x^{4/3} \quad \text{d'après } III.1)
\end{aligned}$$

• troisième cas : $x\ge 1$

$$F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt-\int_x^{+\infty} f(t)dt=1-\int_x^{+\infty} f(t)dt.$$

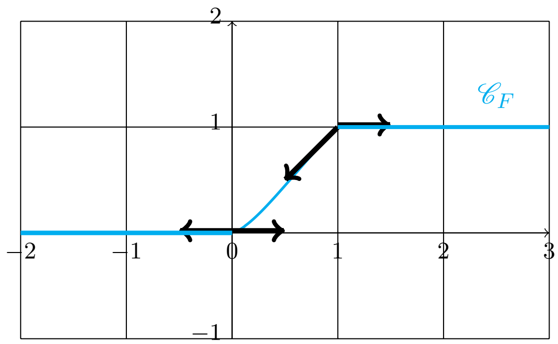
f est nulle sur $[1,+\infty[$ donc sur $[x,+\infty[$. Donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt=\int_x^{+\infty} 0dt=0$.

Donc $F(x)=1$.

En conclusion, on a :

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\le 0 \\ -\dfrac{x^2\ln x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3}{4}x^{4/3} & \text{si } 0<x<1 \\ 1 & \text{si } x\ge 1. \end{cases}$$

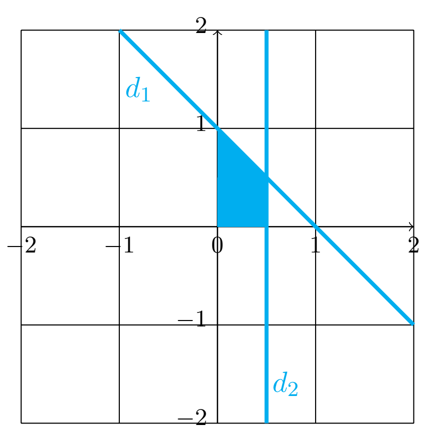
3)Courbe de F



Remarque
F est croissante sur $\mathbf{R}$ en tant que fonction de répartition et continue sur $\mathbf{R}$ puisque X est à densité.
F est dérivable aux points où f est continue, F est donc dérivable sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.
F est en particulier dérivable en 0 et $F'(0) = f(0) = 0$.
En revanche, F n'est pas dérivable en 1 avec $F'_d(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$ et $F'_g(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$.

Partie IV

1)On commence par tracer les droites :
d_1 d'équation $x + y = 1$, c'est-à-dire $y = -x + 1$,
d_2 d'équation $2x = 1$, c'est-à-dire $x = \dfrac{1}{2}$.
Les points de D sont ceux situés dans le quart de plan d'abscisses et d'ordonnées positives, mais également sous d_1 et à gauche de d_2.



2)• La fonction $(x,y) \mapsto x+y$ est polynomiale donc de classe C^1 sur D et prend ses valeurs dans $]0,1[$. Quant à f, elle est de classe C^1 sur $]0,1[$ par produit et somme de fonctions de classe C^1.
Par composée, la fonction $(x,y) \mapsto f(x+y)$ est de classe C^1 sur D.

La fonction $(x,y) \mapsto 2x$ est polynomiale donc de classe C^1 sur D et prend ses valeurs dans $]0,1[$. Quant à f, elle est de classe C^1 sur $]0,1[$.
Par composée, la fonction $(x,y) \mapsto f(2x)$ est de classe C^1 sur D.

Par différence, G est de classe C^1 sur D.

• Pour tout $(x,y) \in D$, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_1 G(x,y) &= \partial_1 \left(f(x+y) - \frac{1}{2} f(2x) \right) \\
&= \partial_1(x+y) \times f'(x+y) - \frac{1}{2} \times 2f'(2x) \quad \text{par dérivation composée} \\
&= 1 \times f'(x+y) - f'(2x) \\
&= f'(x+y) - f'(2x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_2 G(x,y) &= \partial_2 \left(f(x+y) - \frac{1}{2} f(2x) \right) \\
&= \partial_2(x+y) \times f'(x+y) - 0 \quad \text{par dérivation composée} \\
&= 1 \times f'(x+y) \\
&= f'(x+y).
\end{aligned}$$

3)Soit $(x,y) \in D$.

(x,y) est un point critique de G

$$\iff \begin{cases} \partial_1 G(x,y) = 0 \\ \partial_2 G(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f'(x+y) - f'(2x) = 0 \\ f'(x+y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f'(2x) = 0 \\ f'(x+y) = 0 \end{cases}$$

4)D'après II.4.b), l'équation $f'(t) = 0$ a une seule solution α sur $]0,1[$.

Or, si $(x,y) \in D$, on a : $0 < 2x < 1$ et $0 < x+y < 1$. On déduit :

$$\begin{cases} f'(2x) = 0 \\ f'(x+y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = \alpha \\ x+y = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha/2 \\ y = \alpha/2 \end{cases}$$

Ainsi, $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$ est l'unique point critique de G.

5)G est de classe C^2 sur D car ses dérivées partielles d'ordre 1 sont de classe C^1 sur D (faire le même type de raisonnement que pour IV.2)).
Elle admet des dérivées partielles secondes données par :

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,1} G(x,y) &= \partial_1 \left(\partial_1 G(x,y) \right) \\
&= \partial_1 \big(f'(x+y) - f'(2x) \big) \\
&= \partial_1(x+y) \times f''(x+y) - 2f''(2x) \\
&= 1 \times f''(x+y) - 2f''(2x) \\
&= f''(x+y) - 2f''(2x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial^2_{2,1}G(x,y) &= \partial_2\left(\partial_1 G(x,y)\right)\\ &= \partial_2\big(f'(x+y)-f'(2x)\big)\\ &= \partial_2(x+y)\times f''(x+y)-0\\ &= 1\times f''(x+y)\\ &= f''(x+y).\end{aligned}$$

f est de classe C^2 sur D donc d'après le théorème de Schwarz :
$\partial^2_{1,2}G(x,y)=\partial^2_{2,1}G(x,y)=f''(x+y)$.

$$\begin{aligned}\partial^2_{2,2}G(x,y) &= \partial_2\left(\partial_2 G(x,y)\right)\\ &= \partial_2\big(f'(x+y)\big)\\ &= \partial_2(x+y)\times f''(x+y)\\ &= 1\times f''(x+y)\\ &= f''(x+y).\end{aligned}$$

Si G admet un extrémum local, ce ne peut être qu'au point critique $(\alpha/2,\alpha/2)$.
La matrice hessienne de G au point $(\alpha/2,\alpha/2)$ est :

$$A=\begin{pmatrix}\partial^2_{1,1}G(\alpha/2,\alpha/2) & \partial^2_{1,2}G(\alpha/2,\alpha/2)\\ \\ \partial^2_{2,1}G(\alpha/2,\alpha/2) & \partial^2_{2,2}G(\alpha/2,\alpha/2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-f''(\alpha) & f''(\alpha)\\ f''(\alpha) & f''(\alpha)\end{pmatrix}.$$

λ est valeur propre de A

$\Longleftrightarrow A-\lambda I$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}-f''(\alpha)-\lambda & f''(\alpha)\\ f''(\alpha) & f''(\alpha)-\lambda\end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow (-f''(\alpha)-\lambda)\,(f''(\alpha)-\lambda)-f''(\alpha)^2=0$

$\Longleftrightarrow \lambda^2-2f''(\alpha)^2=0$

$\Longleftrightarrow \lambda=\pm\sqrt{2}f''(\alpha)$.

Les valeurs propres de G sont non nulles et de signes contraires. Donc G n'admet pas d'extrémum local en $(\alpha/2,\alpha/2)$. C'est un point selle.

Exercice 2 (eml 2013)

1)A est symétrique donc diagonalisable.

2)$\bullet$ Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, transformons $A - \lambda I$ en une matrice triangulaire.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \longleftrightarrow L_4 \\ L_2 \longleftrightarrow L_3 \\ L_3 \longleftrightarrow L_2 \\ L_4 \longleftrightarrow L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{array}{r} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \longleftarrow \lambda L_1 + 2L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{array}{r} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \longleftarrow \lambda L_2 + L_3 \\ L_4 \end{array}$$

λ est valeur propre de A

$\Longleftrightarrow A - \lambda I$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow 1 - \lambda^2 = 0$ ou $4 - \lambda^2 = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda = \pm 1$ ou $\lambda = \pm 2$.

Les valeurs propres de A sont donc -2, -1, 1 et 2.

$\bullet$ Recherche de $E_{-2}(A)$

$E_{-2}(A) = \{U \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R}) \mid (A + 2I)U = 0\}$.

$$(A+2I)U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 2t & = 0 \\ 2y + z & = 0 \\ y + 2z & = 0 \\ 2x + 2t & = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc $E_{-2}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = -t, y = 0, z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R} \right\}$

$= \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_{-2}(A)$.

Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul.
C'est donc une base de $E_{-2}(A)$.

• Recherche de $E_{-1}(A)$

$E_{-1}(A) = \{U \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R}) \mid (A+I)U = 0\}$.

$$(A+I)U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2t &= 0 \\ y + z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ 2x + t &= 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ t = 0 \end{cases}$$

Donc $E_{-1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = 0, y = -z, t = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R} \right\}$

$= \left\{ z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

De même, $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_{-1}(A)$.

• Recherche de $E_1(A)$

Ce sont presque les mêmes calculs que pour $E_{-1}(A)$.

On trouve $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_1(A)$.

• Recherche de $E_2(A)$

Ce sont presque les mêmes calculs que pour $E_{-2}(A)$.

On trouve $E_2(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_2(A)$.

3)• Comme A est diagonalisable, elle peut s'écrire sous la forme réduite :

$$A = PDP^{-1}$$

– P est une matrice inversible de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont formées des bases des sous-espaces propres de A,
– D est une matrice diagonale de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ dont la diagonale est formée des valeurs propres de A, rangées dans le même ordre que les colonnes de P.

Etant donnée la contrainte mise sur les diagonales de P et D, on prend :

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

• On calcule P^{-1} par la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{r} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \longleftarrow L_2 + L_3 \\ L_4 \longleftarrow L_1 + L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{r} L_1 \longleftarrow 2L_1 - L_4 \\ L_2 \longleftarrow 2L_2 - L_3 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Donc $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4)$C_A = \{M \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R}) \mid AM = MA\}$.

C_A est une partie non vide de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ car la matrice nulle appartient à C_A, du fait que $A0 = 0A = 0$.

Pour toutes matrices M et N de C_A, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned} A(\lambda M + N) &= A\lambda M + AN \\ &= \lambda AM + AN \\ &= \lambda MA + NA \quad \text{car} M \in C_A \text{ et } N \in C_A \\ &= (\lambda M + N)A. \end{aligned}$$

Donc $\lambda M + N \in C_A$, ce qui montre la stabilité de C_A par CL.

Ainsi, C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})/$

5)Soit $M \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$. Posons $N = P^{-1}MP$.

$$\begin{aligned} M \in C_A &\iff AM = MA \\ &\iff PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \\ &\iff \underbrace{P^{-1}P}_{=I} D \underbrace{P^{-1}MP}_{=N} = \underbrace{P^{-1}MP}_{=N} D \underbrace{P^{-1}P}_{=I} \\ &\iff DN = ND \\ &\iff N \in C_D. \end{aligned}$$

6)Posons $N = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$.

$N \in C_D$

$\iff DN = ND$

$$\iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c & -2d \\ -e & -f & -g & -h \\ i & j & k & l \\ 2m & 2n & 2o & 2p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & -b & c & 2d \\ -2e & -f & g & 2h \\ -2i & -j & k & 2l \\ -2m & -n & o & 2p \end{pmatrix}$$

$\iff b = c = d = e = g = h = i = j = l = m = n = o = 0$

$\iff$ N est diagonale.

Donc $C_D = \{$matrices diagonales de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})\}$.

7)$M \in C_A$

$\iff N \in C_D$

$\iff N$ est diagonale

$\Longleftrightarrow P^{-1}MP$ est diagonale

$\Longleftrightarrow \exists(e,f,g,h)\in\mathbf{R}^4 \mid P^{-1}MP = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \exists(e,f,g,h)\in\mathbf{R}^4 \mid M = P\begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}P^{-1}$

$\Longleftrightarrow \exists(e,f,g,h)\in\mathbf{R}^4 \mid M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \exists(e,f,g,h)\in\mathbf{R}^4 \mid M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e & 0 & 0 & h \\ 0 & f & g & 0 \\ 0 & -f & g & 0 \\ -e & 0 & 0 & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \exists(e,f,g,h)\in\mathbf{R}^4 | M = \begin{pmatrix} \frac{e+h}{2} & 0 & 0 & \frac{-e+h}{2} \\ 0 & \frac{f+g}{2} & \frac{-f+g}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-f+g}{2} & \frac{f+g}{2} & 0 \\ \frac{-e+h}{2} & 0 & 0 & \frac{e+h}{2} \end{pmatrix} \quad (*)$

Posons $a = \frac{e+h}{2}$, $b = \frac{-e+h}{2}$, $c = \frac{f+g}{2}$ et $d = \frac{-f+g}{2}$.

Les équivalences précédentes montrent que si $M \in C_A$, alors M est de la forme : $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Réciproquement, supposons M de la forme $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Posons $e = a-b$, $f = c-d$, $g = c+d$ et $h = a+b$.

On obtient aisément : $a = \frac{e+h}{2}$, $b = \frac{-e+h}{2}$, $c = \frac{f+g}{2}$ et $d = \frac{-f+g}{2}$.

Et M est alors de la forme $(*)$ donc dans C_A, grâce aux équivalences.

On conclut que $C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right\}$.

8) $C_A = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U_4} \right)$.

(U_1, U_2, U_3, U_4) est donc une famille génératrice de C_A.

Enfin, pour tous réels a, b, c et d, on a :

$aU_1 + bU_2 + cU_3 + dU_4 = 0$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow a = b = c = d = 0$.

Donc (U_1, U_2, U_3, U_4) est libre.

C'est finalement une base de C_A et $dimC_A = 4$.

Exercice 3 (eml 2013)

Partie I

1)Soit $i \in [\![1, n]\!]$. L'expérience aléatoire est constituée de k épreuves successives, identiques et indépendantes.
A chaque épreuve, la probabilité de succès (tirer la boule i) vaut $1/n$.
X_i compte le nombre de succès.
Ainsi, $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(k, 1/n)$.

On a donc $X_i(\Omega) = [\![0, k]\!]$ et $\forall j \in [\![0, k]\!],\ P(X_i = j) = \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \left(\dfrac{1}{n}\right)^j \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-j}$.

Le cours donne :
$E(X_i) = k \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{k}{n}$ et $V(X_i) = k \times \dfrac{1}{n} \times \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{k}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

2)L'événement $((X_1 = k) \cap (X_2 = k))$ est impossible car on ne peut pas en effectuant k tirages obtenir k fois la boule 1 et k fois la boule 2.
Donc $P\left((X_1 = k) \cap (X_2 = k)\right) = 0$.

Par ailleurs, $P(X_1 = k) = P(X_2 = k) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^k$.

Donc $P\left((X_1 = k) \cap (X_2 = k)\right) \neq P(X_1 = k)P(X_2 = k)$, ce qui prouve que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

A-fortiori, X_1, X_2, ..., X_n ne sont pas indépendantes (mutuellement).

3)a)Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

L'expérience aléatoire est constituée de k épreuves successives, identiques et indépendantes.

A chaque épreuve, la probabilité de succès (tirer la boule i ou la boule j) vaut $2/n$.
$X_i + X_j$ compte le nombre de boules i ou j tirées, soit le nombre de succès.
Ainsi, $X_i + X_j \hookrightarrow \mathscr{B}(k, 2/n)$.

Le cours donne :
$V(X_i + X_j) = k \times \dfrac{2}{n} \times \left(1 - \dfrac{2}{n}\right) = \dfrac{2k}{n}\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)$.

c)De la formule : $V(X_i + X_j) = V(X_i) + V(X_j) + 2cov(X_i, X_j)$, on tire :

$$\begin{aligned} cov(X_i, X_j) &= \frac{1}{2}\left(V(X_i + X_j) - V(X_i) - V(X_j)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2k}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right) - \frac{2k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= -\frac{k}{n^2}. \end{aligned}$$

Partie II

1)Z_1 est le nombre de numéros différents obtenus lors de 1 tirage.
$Z_1(\Omega) = \{1\}$ et $P(Z_1 = 1) = 1$. C'est une loi certaine.
On déduit : $E(Z_1) = 1$.

En effectuant 2 tirages, on peut avoir :
– soit deux numéros différents, ce qui donne $Z_2 = 2$,
– soit deux numéros identiques, ce qui donne $Z_2 = 1$.
Ainsi, $Z_2(\Omega) = \{1, 2\}$.

Calculons $P(Z_2 = 1)$. Sur deux tirages, il y a n^2 couples de boules possibles. Parmi ces couples, n d'entre eux réalisent l'événement $(Z_2 = 1)$, ce sont les couples $(1, 1)$, ..., (n, n).
D'après la formule d'équiprobabilité : $P(Z_2 = 1) = \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$.
On déduit : $P(Z_2 = 2) = 1 - P(Z_2 = 1) = 1 - \dfrac{1}{n}$.
D'où $E(Z_2) = 1 \times P(Z_2 = 1) + 2 \times P(Z_2 = 2) = \dfrac{1}{n} + 2\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 2 - \dfrac{1}{n}$.

2)Soit $k \in \mathbf{N}^*$.

a)Sur k tirages, il y a n^k k-uplets de boules possibles.
Parmi ces k-uplets, n d'entre eux réalisent l'événement $(Z_k = 1)$, ce sont les k-uplets $(1, ..., 1)$, ..., $(n, ..., n)$.
D'après la formule d'équiprobabilité : $P(Z_k = 1) = \dfrac{n}{n^k} = \dfrac{1}{n^{k-1}}$.

b)Remarquons d'abord que si $k > n$, l'événement $(Z_k = k)$ est impossible car on ne peut pas tirer k numéros différents, alors qu'on ne dispose que de n numéros possibles.

Prenons maintenant $k \in [\![1, n]\!]$.
Sur k tirages, il y a toujours n^k $k - uplets$ de boules possibles.
Les k-uplets réalisant l'événement $(Z_k = k)$ doivent porter des numéros distincts deux à deux.
On peut commencer par choisir k numéros parmi n, il y a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ choix, puis permuter ces k numéros au choix de façon à former un k-uplet, ce qu'on peut faire de $k!$ façons.
Le nb de cas favorables est donc $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \times k! = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \times k! = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

$$\text{Ainsi, } P(Z_k = k) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!n^k} & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

c)Soit $l \in [\![1,n]\!]$.
La formule des probabilités totales pour le s.c.e $(Z_k = i)_{1\leq i\leq n}$ donne :

$$P(Z_{k+1} = l) = \sum_{i=1}^{n} P_{(Z_k=i)}(Z_{k+1} = l)P(Z_k = i).$$

Calculons les probabilités conditionnelles.
Supposons donc $(Z_k = i)$ réalisé. Cela signifie que les k premiers tirages ont amené i numéros distincts.
Pour réaliser l'événement $(Z_{k+1} = l)$, on doit avoir :
– $l \geq i$, puisque avec un tirage de plus (le $k+1$-ème), le nombre de numéros distincts ne peut pas diminuer,
– $l \leq i+1$, puisqu'un tirage de plus ne peut pas apporter plus d'un numéro nouveau.

Ainsi, les probabilités conditionnelles sont toutes nulles, sauf celles dont l'indice i vérifie $i \leq l \leq i+1$, c'est-à-dire pour $i = l$ et $i = l-1$.

On déduit :

$$P(Z_{k+1} = l) = P_{(Z_k=l)}(Z_{k+1} = l)P(Z_k = l) + P_{(Z_k=l-1)}(Z_{k+1} = l)P(Z_k = l-1).$$

Calculons enfin les deux probabilités conditionnelles restantes.

Supposons l'événement $(Z_k = l)$ réalisé. L'événement $(Z_{k+1} = l)$ se réalise si et seulement si le $k+1$-ème tirage n'apporte pas de numéro nouveau, ce doit donc être un des l numéros obtenus lors des k premiers tirages.
Donc $P_{(Z_k=l)}(Z_{k+1} = l) = \dfrac{l}{n}$.
Supposons l'événement $(Z_k = l-1)$ réalisé. L'événement $(Z_{k+1} = l)$ se réalise si et seulement si le $k+1$-ème tirage apporte un numéro nouveau, ce doit donc être un des $n-(l-1)$ numéros non obtenus lors des k premiers tirages.
Donc $P_{(Z_k=l-1)}(Z_{k+1} = l) = \dfrac{n-(l-1)}{n} = \dfrac{n-l+1}{n}$.
On déduit finalement :

$$P(Z_{k+1} = l) = \frac{l}{n}P(Z_k = l) + \frac{n-l+1}{n}P(Z_k = l-1).$$

> Remarque
> Pour tout entier k non nul, on a : $Z_k(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$.
> Plus précisément, $Z_k(\Omega) = [\![1, min(k,n)]\!]$ du fait que Z_k ne peut ni dépasser n, ni dépasser k.

d)En multipliant membre à membre 2)c), puis en sommant, on obtient :

$$\sum_{l=1}^{n} lP(Z_{k+1} = l) = \sum_{l=1}^{n} l\left(\frac{l}{n}P(Z_k = l) + \frac{n-l+1}{n}P(Z_k = l-1)\right).$$

Puis, par linéarité de la somme :

$$E\left(Z_{k+1}\right)=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} l^2 P(Z_k=l)+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} l(n-l+1)P(Z_k=l-1)\quad (*)$$

Réécrivons la somme de droite en posant $j=l-1$:

$$\sum_{l=1}^{n} l(n-l+1)P(Z_k=l-1)$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)(n-j)P(Z_k=j).$$

$$=n\underbrace{P(Z_k=0)}_{=0}+\sum_{j=1}^{n}(j+1)(n-j)P(Z_k=j)-\underbrace{(n+1)(n-n)P(Z_k=n)}_{=0}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(j+1)(n-j)P(Z_k=j).$$

En injectant dans $(*)$ et en renommant j en l, on tire :

$$\begin{aligned}
E\left(Z_{k+1}\right)&=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} l^2 P(Z_k=l)+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(l+1)(n-l)P(Z_k=l)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\left[l^2+(l+1)(n-l)\right]P(Z_k=l)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\left[l^2+ln-l^2+n-l\right]P(Z_k=l)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\left[(n-1)l+n\right]P(Z_k=l)\\
&=\frac{n-1}{n}\sum_{l=1}^{n} lP(Z_k=l)+\sum_{l=1}^{n}P(Z_k=l)\\
&=\frac{n-1}{n}E(Z_k)+1.
\end{aligned}$$

3)a)Pour tout entier $k\geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
v_{k+1}&=E(Z_{k+1})-n\\
&=\frac{n-1}{n}E(Z_k)+1-n\\
&=\frac{n-1}{n}\left(v_k+n\right)+1-n\\
&=\frac{n-1}{n}v_k.
\end{aligned}$$

Donc la suite $(v_k)_{k\geq 1}$ est géométrique de raison $\dfrac{n-1}{n}$.

b)On déduit pour tout entier $k \geq 1$:

$v_k = v_1 \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$ avec $v_1 = E(Z_1) - n = 1 - n$

D'où $E(Z_k) = v_k + n$

$$= (1-n)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} + n$$
$$= (1-n) \times \frac{n}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k} + n$$
$$= -n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k} + n$$
$$= n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k}\right).$$

Partie III

1)La question II.2)a) donne : $P(Z_k = 1) = \frac{1}{n^{k-1}}$.

Comme ici $n = 4$, on obtient : $P(Z_k = 1) = \frac{1}{4^{k-1}}$.

L'urne ne contenant que 4 boules numérotées 1,2,3,4, il est impossible de réaliser l'événement $(Z_k \geq 5)$ puisque cela imposerait d'obtenir au moins 5 numéros distincts. Donc $P((Z_k \geq 5) = 0$.

2)Effectuer k tirages avec remise d'une boule dans l'urne revient à construire une application de l'ensemble E des k tirages dans l'ensemble F des 4 boules. Il y a 4^k telles applications.

L'événement $(Z_k = 2)$ se réalise si et seulement si ces k tirages amènent deux numéros différents.

On commence par choisir ces 2 numéros parmi les 4 possibles, ce qui fait $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$ possibilités.

Ces 2 numéros étant choisis, on construit une application de E vers l'ensemble formé de ces 2 numéros, ce qui donne 2^k applications possibles, auxquelles il faut retrancher les 2 applications qui envoient les éléments de E vers le même numéro. Donc $Card(Z_k = 2) = 6\left(2^k - 2\right)$.

Ainsi, $P(Z_k = 2) = \frac{6\left(2^k-2\right)}{4^k}$.

3)a)L'événement $(Z_k \leq 3)$ se réalise si les k tirages amènent au plus 3 numéros distincts, ce qui se produit si et seulement si l'un au moins des numéros 1, 2, 3 ou 4 n'a pas été obtenu.

Ainsi, $(Z_k \leq 3) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

Donc $P(Z_k \leq 3) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$.

On calcule cette probabilité par la formule du crible en remarquant que pour chacune des 3 sommes, les probabilités sont identiques pour des raisons évidentes de symétrie. Calculons le nombre de termes de chaque somme.

$\sum_{i=1}^{4} P(A_i)$ a 4 termes.

$\sum_{1\leq i<j\leq 4} P(A_i \cap A_j)$ a 6 termes car $\binom{4}{2}$ couples d'indices possibles.

$\sum_{1\leq i<j<k\leq 4} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ a 4 termes car $\binom{4}{3}$ triplets d'indices possibles.

Enfin, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$ car impossible de n'obtenir aucun numéro.
On déduit finalement :

$$P(Zk \leq 3) = 4P(A_1) - 6P(A_1 \cap A_2) + 4P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

b)A_1 se réalise si et seulement si la boule n° 1 ne sort à aucun des k tirages.
Il y a 3^k applications de l'ensemble E des k tirages dans l'ensemble des boules numérotées 2,3,4.

Donc $Card(A_1) = 3^k$. D'où $P(A_1) = \frac{3^k}{4^k}$.

$A_1 \cap A_2$ se réalise si et seulement si les boules numérotées 1 et 2 ne sortent à aucun des k tirages.
Il y a 2^k applications de l'ensemble E des k tirages dans l'ensemble des boules numérotées 3 et 4.

Donc $Card(A_1 \cap A_2) = 2^k$. D'où $P(A_1 \cap A_2) = \frac{2^k}{4^k}$.

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ se réalise si et seulement si les boules numérotées 1,2 et 3 ne sortent à aucun des k tirages, c'est-à-dire si et seulement si la boule numéro 4 sort à chacun des k tirages.
Il y a qu'une seule application de l'ensemble E des k tirages dans l'ensemble constitué de l'unique boule numéro 4.

Donc $Card(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1$. D'où $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4^k}$.

c)De la question III.3)a), on déduit :

$P(Z_k \leq 3) = 4 \times \frac{3^k}{4^k} - 6 \times \frac{2^k}{4^k} + 4 \times \frac{1}{4^k} = \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k}$.

De l'égalité $P(Z_k \leq 3) = P(Z_k = 1) + P(Z_k = 2) + P(Z_k = 3)$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(Z_k = 3) &= P(Z_k \leq 3) - P(Z_k = 1) - P(Z_k = 2) \\ &= \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k} - \frac{4}{4^k} - \frac{6\left(2^k - 2\right)}{4^k} \\ &= \frac{4 \times 3^k - 12 \times 2^k + 12}{4^k}. \end{aligned}$$

Enfin, $P(Z_k = 4) = 1 - P(Z_k \leq 3) = 1 - \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k}$.