
Corrigé révisions - séance 4

Exercice

Partie I

1)a) $P(X) = X^2$ est un polynôme annulateur de N car $P(N) = N^2 = 0$.

Donc $\text{sp}(N) \subset \{0\}$. Donc 0 est la seule valeur propre possible de N .

Supposons que N est inversible. Alors, N^2 , c'est-à-dire 0, est inversible par produit de deux matrices inversibles, ce qui mène à une contradiction.

Donc N n'est pas inversible, ce qui prouve que 0 est valeur propre de N .

Ainsi, 0 est la seule valeur propre de N .

b) Supposons que N est diagonalisable. Alors, il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $N = PDP^{-1}$ où D porte sur sa diagonale les valeurs propres de N , c'est-à-dire 0.

On a donc $D = 0$, puis $N = 0$, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé.

Ainsi, N n'est pas diagonalisable.

2)a) $\forall t \in \mathbf{R}, (I - tN)(I + tN) = I^2 + ItN - tNI + tNtN = I + \cancel{tN} - \cancel{tN} + t^2 N^2 = I$.

b) L'égalité ci-dessus prouve que pour tout $t \in \mathbf{R}$, la matrice $I - tN$ est inversible et que $(I - tN)^{-1} = I + tN$.

3)a) Montrons les deux implications. Soit $t \in \mathbf{R}$.

$\Rightarrow$ Supposons que $Y'(t) = NY(t)$.

En dérivant membre à membre $Z(t) = (I - tN)Y(t)$ à l'aide de $(*)$, on obtient :

$$\begin{aligned} Z'(t) &= -NY(t) + (I - tN)Y'(t) \\ &= -NY(t) + (I - tN)NY(t) \quad \text{par hypothèse faite} \\ &= \cancel{-NY(t)} + \cancel{NY(t)} - tN^2Y(t) \\ &= 0 \quad \text{car } N^2 = 0. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Supposons que $Z'(t) = 0$.

En remarquant que $Z(t) = (I - tN)Y(t) \iff Y(t) = (I + tN)Z(t)$, on obtient en dérivant membre à membre la deuxième égalité :

$$\begin{aligned} Y'(t) &= NZ(t) + (I + tN)Z'(t) \\ &= NZ(t) \quad \text{car par hypothèse faite, } Z'(t) = 0 \\ &= N(I - tN)Y(t) \\ &= NY(t) - tN^2Y(t) \\ &= NY(t) \quad \text{car } N^2 = 0. \end{aligned}$$

On a donc prouvé que $\forall t \in \mathbf{R}, Y'(t) = NY(t) \iff Z'(t) = 0$.

b) Y est solution de $(S_1) \iff \forall t \in \mathbf{R}, Y'(t) = NY(t)$

$$\iff \forall t \in \mathbf{R}, Z'(t) = 0 \quad \text{d'après 3)a)}$$

$$\iff \exists Y_0 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}), \forall t \in \mathbf{R}, Z(t) = Y_0$$

$$\iff \exists Y_0 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}), \forall t \in \mathbf{R}, Y(t) = (I + tN)Y_0.$$

Partie II

4)a) $A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, puis $(A + 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$P(X) = (X + 2)^2$ est un polynôme annulateur de A car $P(A) = (A + 2I)^2 = 0$.
Donc $\text{sp}(A) \subset \{-2\}$. Donc -2 est la seule valeur propre possible de N .

Par ailleurs, $A + 2I$ est de rang 1 puisque ses colonnes sont non nulles et colinéaires.
Donc $A + 2I$ n'est pas inversible, ce qui prouve que -2 est valeur propre de A .

Ainsi, -2 est la seule valeur propre de A .

b) Avec le même raisonnement que la question 1)b), on voit que si A était diagonalisable, elle serait égale à $-2I$, ce qui mène à une contradiction.

Donc A n'est pas diagonalisable.

✓ On pouvait aussi chercher $E_{-2}(A)$ et voir qu'il est de dimension 1.

5)a) Remarquons d'abord que $Y(t) = X(t)e^{2t} \iff X(t) = Y(t)e^{-2t}$.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbf{R}, X'(t) = AX(t) &\iff Y'(t)e^{-2t} - 2e^{-2t}Y(t) = AX(t) \\ &\iff Y'(t)e^{-2t} = AX(t) + 2e^{-2t}Y(t) \\ &\iff Y'(t)e^{-2t} = AY(t)e^{-2t} + 2e^{-2t}Y(t). \\ &\iff Y'(t)e^{-2t} = (A + 2I)Y(t)e^{-2t} \\ &\iff Y'(t) = (A + 2I)Y(t) \end{aligned}$$

b) D'après la question 4)a), la matrice $A + 2I$ est nilpotente d'ordre 2.

On peut donc appliquer la question 3)b) avec $N \rightarrow A + 2I$, ce qui donne :

$$\forall t \in \mathbf{R}, Y'(t) = (A + 2I)Y(t) \iff \exists Y_0 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}), \forall t \in \mathbf{R}, Y(t) = (I + tN)Y_0.$$

La question 5)a) donne alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbf{R}, X'(t) = AX(t) &\iff \exists Y_0 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}), \forall t \in \mathbf{R}, Y(t) = (I + tN)Y_0 \\ &\iff \exists Y_0 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}), \forall t \in \mathbf{R}, X(t)e^{2t} = (I + tN)Y_0 \\ &\iff \exists Y_0 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}), \forall t \in \mathbf{R}, X(t) = e^{-2t}(I + tN)Y_0. \end{aligned}$$

En posant $Y_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= e^{-2t} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} (1+t)a - bt \\ ta + (1-t)b \end{pmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} (a-b)t + a \\ (a-b)t + b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ((a-b)t + a)e^{-2t} \\ ((a-b)t + b)e^{-2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Partie III

6)a) Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ une solution de (S_2) .

$$\text{On a alors : } \begin{cases} x'(t) = -x(t) - y(t) & (1) \\ y'(t) = x(t) - 3y(t) & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Puis, } \forall t \in \mathbf{R}, \quad x''(t) &= -x'(t) - y'(t) \quad \text{en dérivant (1)} \\ &= -x'(t) - (x(t) - 3y(t)) \quad \text{grâce à (2)} \\ &= -x'(t) - x(t) + 3y(t) \\ &= -x'(t) - x(t) + 3(-x(t) - x'(t)) \quad \text{grâce à (1)} \\ &= -4x'(t) - 4x(t). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \forall t \in \mathbf{R}, \quad x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0.$$

b) • La fonction $t \mapsto x(t)$ est solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre $(E) : z'' + 4z' + 4z = 0$.

L'équation caractéristique associée est $r^2 + 4r + 4 = 0$. Elle admet une unique racine $r_0 = -2$.

D'après le cours, les solutions de (E) sont de la forme $t \mapsto (\beta_1 t + \beta_2)e^{-2t}$ où β_1 et β_2 sont des réels quelconques.

$$\text{Ainsi, } \exists (\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2, \forall t \in \mathbf{R}, \quad x(t) = (\beta_1 t + \beta_2)e^{-2t}.$$

• On déduit alors en dérivant :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad x'(t) = \beta_1 e^{-2t} - 2e^{-2t}(\beta_1 t + \beta_2) = (\beta_1 - 2\beta_1 t - 2\beta_2)e^{-2t} \quad (3)$$

On déduit en utilisant (1) :

$$\begin{aligned} y(t) &= -x'(t) - x(t) \\ &= -(\beta_1 - 2\beta_1 t - 2\beta_2)e^{-2t} - (\beta_1 t + \beta_2)e^{-2t} \\ &= (\beta_1 t + \beta_2 - \beta_1)e^{-2t}. \end{aligned}$$

$$7) \text{Réciproquement, prenons } x(t) = (\beta_1 t + \beta_2)e^{-2t} \text{ et } y(t) = (\beta_1 t + \beta_2 - \beta_1)e^{-2t}.$$

On a alors en reprenant une partie des calculs faits en 6)b) :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbf{R}, \quad x'(t) + x(t) + y(t) &= (\beta_1 - 2\beta_1 t - 2\beta_2)e^{-2t} + (\beta_1 t + \beta_2)e^{-2t} + (\beta_1 t + \beta_2 - \beta_1)e^{-2t} \\ &= (\beta_1 - 2\beta_1 t - 2\beta_2 + \beta_1 t + \beta_2 + \beta_1 t + \beta_2 - \beta_1)e^{-2t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall t \in \mathbf{R}, \quad x'(t) = -x(t) - y(t).$$

$$\text{Par ailleurs, } \forall t \in \mathbf{R}, \quad y'(t) = \beta_1 e^{-2t} - 2e^{-2t}(\beta_1 t + \beta_2 - \beta_1) = (3\beta_1 - 2\beta_1 t - 2\beta_2)e^{-2t}.$$

On déduit :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbf{R}, \quad y'(t) - x(t) + 3y(t) &= (3\beta_1 - 2\beta_1 t - 2\beta_2)e^{-2t} - (\beta_1 t + \beta_2)e^{-2t} + 3(\beta_1 t + \beta_2 - \beta_1)e^{-2t} \\ &= (3\beta_1 - 2\beta_1 t - 2\beta_2 - \beta_1 t - \beta_2 + 3\beta_1 t + 3\beta_2 - 3\beta_1)e^{-2t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall t \in \mathbf{R}, \quad y'(t) = x(t) - 3y(t).$$

$$\text{On conclut que } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ est solution de } (S_2).$$

8) Les questions 6) et 7) prouvent que les solutions de (S_2) sont les matrices colonnes $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ où $x(t) = (\beta_1 t + \beta_2)e^{-2t}$ et $y(t) = (\beta_1 t + \beta_2 - \beta_1)e^{-2t}$,

les réels β_1 et β_2 étant quelconques.

En posant $a = \beta_2$ et $b = \beta_2 - \beta_1$, on a alors : $\beta_1 = a - b$ et $\beta_2 = a$, ce qui donne : $x(t) = ((a - b)t + a)e^{-2t}$ et $y(t) = ((a - b)t + b)e^{-2t}$.

Et on retrouve bien les résultats de la question 5)b)...

Partie IV

9) Les points d'équilibres de (S_2) s'obtiennent en cherchant les matrices colonnes $X(t) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ constantes et solutions de (S_2) .

Comme $X'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le système différentiel (S_2) se ramène à $AX(t) = 0$, c'est-à-dire $A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui entraîne que $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in E_0(A)$.

Or, $E_0(A) = \{0\}$ car 0 n'est pas valeur propre de A . Donc $c = d = 0$.

Ainsi, $(0,0)$ est le seul point d'équilibre de (S_2) .

10) Soit $T = \{(x(t), y(t)), t \in \mathbf{R}\}$ une trajectoire de (S_2) , distincte de la trajectoire d'équilibre.

$$\text{a) } \bullet \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} ((a - b)t + a)e^{-2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} ((a - b)te^{-2t} + ae^{-2t}).$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-2t} = 0 \text{ par croissances comparées et } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2t} = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} ((a - b)t + b)e^{-2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} ((a - b)te^{-2t} + be^{-2t}).$$

On conclut de même que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$.

• Les limites trouvées montrent que les trajectoires de (S_2) convergent vers $(0,0)$.
 $(0,0)$ est donc un point d'équilibre asymptotiquement stable.

b) Supposons qu'il existe des constantes réelles m et p telles que

$$\forall t \in \mathbf{R}, y(t) = mx(t) + p.$$

Un passage à la limite quand $t \rightarrow +\infty$ donne : $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = m \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) + p$,
c'est-à-dire : $0 = m \times 0 + p$. Donc $p = 0$.

Par ailleurs, en revenant aux expressions de $x(t)$ et $y(t)$ trouvées en 5)b), on a pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$y(t) = mx(t) + p$$

$$\iff ((a - b)t + b)e^{-2t} = m((a - b)t + a)e^{-2t} + 0$$

$$\iff (a - b)t + b = m((a - b)t + a)$$

$$\iff (a - b)t + b = m(a - b)t + ma$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = m(a - b) \\ \text{et} \\ b = ma \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (a - b)(1 - m) = 0 \\ \text{et} \\ b = ma \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \text{ ou } m = 1 \\ \text{et} \\ b = ma \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \text{ et } b = ma \\ \text{ou} \\ m = 1 \text{ et } b = ma \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \text{ et } a = ma \\ \text{ou} \\ m = 1 \text{ et } b = a \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \text{ et } (1 - m)a = 0 \\ \text{ou} \\ m = 1 \text{ et } b = a \end{cases} \\
&\Leftrightarrow a = b \text{ et } m = 1.
\end{aligned}$$

En effet, pour la première équation, avoir $a = 0$ entraînerait $b = 0$, ce qui signifierait que T est la trajectoire d'équilibre (contraire à l'énoncé).

On a donc $a \neq 0$, puis $m = 1$.

On a donc établi que s'il existe des réels m et p tels que $\forall t \in \mathbf{R}, y(t) = mx(t) + p$, alors on a : $p = 0$, $m = 1$ et $a = b$.

c) La question précédente montre que si une trajectoire T de (S_2) est contenue dans une droite, alors cette droite ne peut être que la droite d'équation $y = x$ (puisque $p = 0$ et $m = 1$). De plus, $a = b$.

La trajectoire est donc de la forme : $T = \{(ae^{-2t}, ae^{-2t}), t \in \mathbf{R}\}$.

$a > 0$

T est la demi-droite d'équation $y = x$ et d'abscisses strictement positives,

$a < 0$

T est la demi-droite d'équation $y = x$ et d'abscisses strictement négatives.

Réciproquement, on vérifie immédiatement que ces deux demi-droites sont bien des trajectoires de (S_2) .

d) On voit que toutes les trajectoires convergent vers le point d'équilibre $(0,0)$. Cela confirme que ce point est asymptotiquement stable.

11) Etude de T_1

$T_1 = \{(e^{-2t}, e^{-2t}), t \in \mathbf{R}\}$ est la demi-droite d'équation $y = x$ et d'abscisses strictement positives.

En effet, $\forall t \in \mathbf{R}, y(t) = x(t)$. De plus quand t décrit $\mathbf{R}$, $x(t)$ décrit $]0, +\infty[$.

Etude de T_2

$T_2 = \{(-e^{-2t}, -e^{-2t}), t \in \mathbf{R}\}$ est la demi-droite d'équation $y = x$ et d'abscisses strictement négatives.

Etude de T_3

$T_3 = \left\{ ((t+2)e^{-2t}, (t+1)e^{-2t}), t \in \mathbf{R} \right\}$ est une courbe paramétrée.

On n'est pas capable de la tracer à notre niveau, mais on peut tout de même étudier les variations des fonctions $x : t \mapsto (t+2)e^{-2t}$ et $y : t \mapsto (t+1)e^{-2t}$.

$\forall t \in \mathbf{R}, x'(t) = (-2t-3)e^{-2t}$ et $y'(t) = (-2t-1)e^{-2t}$.

t	$-\infty$	$-3/2$	$+\infty$
$x'(t)$	+	0	-
$x(t)$	$-\infty$	$\frac{e^3}{2}$	0

t	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$y'(t)$	+	0	-
$y(t)$	$-\infty$	$\frac{e}{2}$	0

Lecture des tableaux

$t \in]-\infty, -3/2]$: x et y croissent, la trajectoire monte vers la droite,

$t \in [-3/2, -1/2]$: x décroît et y croît, la trajectoire monte vers la gauche,

$t \in [-1/2, +\infty[$: x et y décroissent, la trajectoire descend vers la gauche et tend vers $(0,0)$.

