Correction DS3

Exercice 1

Partie A (rotations)

1)Soient $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathscr{R}$.

On obtient : $MN = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -(bc+ad) \\ bc+ad & ac-bd \end{pmatrix}$.

Posons $e = ac - bd$ et $f = bc + ad$.

Alors, MN est de la forme $\begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix}$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} e^2 + f^2 &= (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd + a^2d^2 \\ &= (a^2+b^2)c^2 + (a^2+b^2)d^2 \\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ &= 1 \times 1 \text{ car } M \in \mathscr{R} \text{ et } N \in \mathscr{R} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc $\forall (M,N) \in \mathscr{R}^2,\ MN \in \mathscr{R}$.

2)Soit M une matrice quelconque de $\mathscr{R}$.

a)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $M^n \in \mathscr{R}$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $M^0 \in \mathscr{R}$ ».

Or, $M^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{R}$, puisque de la forme souhaitée avec $a = 1$, $b = 0$ et $a^2 + b^2 = 1$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $M^n \in \mathscr{R}$ et par énoncé $M \in \mathscr{R}$.
Par produit, $M^{n+1} = M^n M \in \mathscr{R}$ grâce à la question 1).
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ M^n \in \mathscr{R}$.

b)Posons $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

De l'égalité $a^2 + b^2 = 1$, on tire : $a^2 = 1 - b^2$ donc $a^2 \leq 1$.
On a alors : $0 \leq a^2 \leq 1$, d'où $-1 \leq a \leq 1$.
De même, $-1 \leq b \leq 1$, mais aussi $-1 \leq -b \leq 1$.

Ainsi, tous les coefficients de M appartiennent à $[-1, 1]$.

c)Posons $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
Le déterminant de M vaut $a^2 + b^2 = 1$. Il est non nul donc M est inversible.
Le cours donne : $M^{-1} = \dfrac{1}{detM} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

M^{-1} est de la forme $\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ avec $c = -b$.

De plus, $a^2 + c^2 = a^2 + b^2 = 1$. Donc $M^{-1} \in \mathscr{R}$.

3)$\mathscr{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ car $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathscr{R}$.

Partie B (nombre plastique)

4)a)Etudions $f : x \mapsto x^3 - x - 1$.
f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = 3x^2 - 1$.
Les racines de f' sont $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Le maximum local de f est $M = f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) - 1$
$= \dfrac{-1}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} - 1 < 0$.
Le minimul local de f est $m < 0$.
Donc f est strictement négative sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$.
De plus, f est continue et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$.
D'après le théorème de bijection, f réalise une bijection de $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ sur $[m, +\infty[$.
$0 \in [m, +\infty[$ admet donc un unique antécédent φ dans $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$.
Ainsi, l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ admet une unique solution φ.
$f(1) = -1,\ f(\varphi) = 0$ et $f(2) = 5$. Donc $f(1) < f(\varphi) < f(2)$.
Comme f est strictement croissante sur $[1, 2]$ on déduit : $1 < \varphi < 2$.

b)φ est solution de l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ donc $\varphi^3 - \varphi - 1 = 0$,
c'est-à-dire $\varphi^3 = \varphi + 1$.

$1 - \varphi^2 = \dfrac{\varphi(1-\varphi^2)}{\varphi} = \dfrac{\varphi - \varphi^3}{\varphi} = \dfrac{\varphi - (\varphi+1)}{\varphi} = -\dfrac{1}{\varphi}$.

$\varphi^5 = \varphi^3 \times \varphi^2 = (\varphi+1)\varphi^2 = \varphi^3 + \varphi^2 = (\varphi+1) + \varphi^2 = \varphi^2 + \varphi + 1$.

$\varphi^{-4} = \dfrac{1}{\varphi^4} = \dfrac{\varphi^3 - \varphi}{\varphi^4} = \dfrac{\varphi(\varphi+1)\varphi - 1)}{\varphi \times \varphi^3} = \varphi - 1$.

5)λ est valeur propre de B

$\iff B - \lambda I_2$ n'est pas inversible

$\iff det(B - \lambda I_2) = 0$

$\iff (-\lambda)(-\varphi - \lambda) + \dfrac{1}{\varphi} = 0$

$\iff \lambda^2 + \varphi\lambda + \dfrac{1}{\varphi} = 0$.

Le discriminant vaut $\Delta = \varphi^2 - \dfrac{4}{\varphi} = \dfrac{\varphi^3 - 4}{\varphi} = \dfrac{\varphi + 1 - 4}{\varphi} = \dfrac{\varphi - 3}{\varphi}$.

$\Delta < 0$ puisque $1 < \varphi < 2$.

Donc l'équation n'a pas de solution, ce qui prouve que B ne possède aucune valeur propre.

6)a)Le déterminant de P vaut $-\sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4\varphi}} \neq 0$. Donc P est inversible.

De plus, $CP = \begin{pmatrix} -\dfrac{\varphi}{2} & -\sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4\varphi}} \\ \sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4\varphi}} & -\dfrac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\varphi}{2} & 1 \\ \sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4\varphi}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\varphi) & -\dfrac{\varphi}{2} \\ 0 & \sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4\varphi}} \end{pmatrix}$.

avec $g(\varphi) = -\dfrac{\varphi^2}{4} - \dfrac{3-\varphi}{4\varphi} = \dfrac{-\varphi^3 - 3 + \varphi}{4\varphi} = \dfrac{-(1+\varphi) - 3 + \varphi}{4\varphi} = -\dfrac{1}{\varphi}$.

$$PB = \begin{pmatrix} \dfrac{\varphi}{2} & 1 \\ \sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4\varphi}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{\varphi} & -\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\varphi} & -\dfrac{\varphi}{2} \\ 0 & \sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4\varphi}} \end{pmatrix}.$$

On conclut que $CP = PB$.

b)En multipliant à gauche l'égalité précédente par P^{-1}, on a : $B = P^{-1}CP$.

Puis, on fait une récurrence en posant $\mathscr{P}(n)$: « $B^n = P^{-1}C^nP$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $B^0 = P^{-1}C^0P$ », soit « $I = P^{-1}IP$ », c'est vrai.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}B^{n+1} &= B^n B \\ &= \left(P^{-1}C^n P\right)\left(P^{-1}CP\right) \text{ par HR et l'égalité du début} \\ &= P^{-1}C^{n+1}P.\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ B^n = P^{-1}C^nP$.

7)a)$\sqrt{\varphi}\ C = \begin{pmatrix} -\dfrac{\varphi\sqrt{\varphi}}{2} & -\sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4}} \\ \sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4}} & -\dfrac{\varphi\sqrt{\varphi}}{2} \end{pmatrix}$.

$\sqrt{\varphi}\ C$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a = -\dfrac{\varphi\sqrt{\varphi}}{2}$ et $b = \sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4}}$.

De plus, $a^2+b^2 = \left(-\dfrac{\varphi\sqrt{\varphi}}{2}\right)^2 + \dfrac{3-\varphi}{4} = \dfrac{\varphi^3+3-\varphi}{4} = \dfrac{\varphi+1+3-\varphi}{4} = 1$

Donc $\sqrt{\varphi}\ C$ appartient à $\mathscr{R}$.

D'après la question 2)a), on alors $\forall n \in \mathbf{N},\ \left(\sqrt{\varphi}\ C\right)^n \in \mathscr{R}$.

En multipliant membre à membre l'égalité 6)b) par $\left(\sqrt{\varphi}\right)^n$, on a :
$\left(\sqrt{\varphi}\right)^n B^n = \left(\sqrt{\varphi}\right)^n P^{-1}C^nP$, c'est-à-dire :

$$\left(\sqrt{\varphi}\right)^n B^n = P^{-1}\left(\sqrt{\varphi}\ C\right)^n P \quad (*)$$

Les coefficients de $\left(\sqrt{\varphi}\ C\right)^n$ étant dans l'intervalle $[-1,1]$, les coefficients de la matrice $P^{-1}\left(\sqrt{\varphi}\ C\right)^n P$ sont des suites bornées (faire le calcul des produits de matrices, si nécessaire).

Posons alors : $B^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ et $P^{-1}\left(\sqrt{\varphi}\ C\right)^n P = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & t_n \end{pmatrix}$.

L'égalité $(*)$ donne :
$\left(\sqrt{\varphi}\right)^n \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & t_n \end{pmatrix}$, ce qui mène à : $a_n = \dfrac{x_n}{\left(\sqrt{\varphi}\right)^n}$.

Comme la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée, il existe des constantes réelles m et M telles que $\forall n \in \mathbf{N},\ m \leq x_n \leq M$. On déduit :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \frac{m}{\left(\sqrt{\varphi}\right)^n} \leq a_n \leq \frac{M}{\left(\sqrt{\varphi}\right)^n}.$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{\varphi}\right)^n = +\infty$ car $\sqrt{\varphi} > 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{m}{\left(\sqrt{\varphi}\right)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{\left(\sqrt{\varphi}\right)^n} = 0$.

D'après la propriété des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Enfin, le même raisonnement s'applique pour b_n, c_n et d_n, du fait des égalités : $b_n = \dfrac{y_n}{\left(\sqrt{\varphi}\right)^n}$, $c_n = \dfrac{z_n}{\left(\sqrt{\varphi}\right)^n}$, $d_n = \dfrac{t_n}{\left(\sqrt{\varphi}\right)^n}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$.

Partie C (calcul d'une puissance de matrice)

8)a)$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A + I$.

b)Posons $P(X) = X^3 - X - 1$. Alors, $P(A) = A^3 - A - I = 0$.
Donc P est un polynôme annulateur de A.
Les valeurs propres sont donc à chercher parmi les racines de P, polynôme dont l'unique racine est φ (voir question 4)). Ainsi, $sp(A) \subset \{\varphi\}$.
Il reste à confirmer que φ est bien une valeur propre de A.

$E_\varphi(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A - \varphi I)U = 0\}$. On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(A - \varphi I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} -\varphi & 1 & 0 \\ 0 & -\varphi & 1 \\ 1 & 1 & -\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -\varphi x + y = 0 \\ -\varphi y + z = 0 \\ x + y - \varphi z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \varphi x \\ z = \varphi^2 x \\ (1 + \varphi - \varphi^3)x = 0 \end{cases}$$

Par construction, $1 + \varphi - \varphi^3 = 0$.

Le système est donc équivalent à : $\begin{cases} y = \varphi x \\ z = \varphi^2 x \\ x \in \mathbf{R} \end{cases}$

Donc $E_\varphi(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = \varphi x \text{ et } z = \varphi^2 x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \varphi x \\ \varphi^2 x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\}$.

Ainsi, $E_\varphi(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \\ \varphi^2 \end{pmatrix} \right)$.

ll est non nul, ce qui confirme que φ est valeur propre de A (c'est la seule possible d'après ce qu'on a vu au début).
Le sous-espace propre de A associé à φ est $E_\varphi(A)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \\ \varphi^2 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $E_\varphi(A)$ et libre car formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_1(A)$.

c)$A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et $dim E_\varphi(A) = 1 < 3$.

Donc A n'est pas diagonalisable, d'après le théorème de réduction.

9)a)Pour tous réels a, b et c, on a :

$$au + bv + cw = 0 \iff a\big(1, \varphi, \varphi^2\big) + b\left(-\varphi^2, 1, 0\right) + c\left(-\varphi, 0, 1\right) = (0, 0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} a - \varphi^2 b - \varphi c & = 0 \\ \varphi a + b & = 0 \\ \varphi^2 a + c & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1 + 2\varphi^3)a = 0 \\ b = -\varphi a \\ c = -\varphi^2 a \end{cases}$$

Comme $1 + 2\varphi^3 \neq 0$, la première équation donne $a = 0$, puis $b = c = 0$.

Donc la famille (u, v, w) est libre. Son cardinal coïncide avec la dimension de $\mathbf{R}^3$. C'est donc une base de $\mathbf{R}^3$.

La matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{C}$ est : $Q = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi^2 & -\varphi \\ \varphi & 1 & 0 \\ \varphi^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b)Le vecteur colonne de $\Phi(u)$ dans la base canonique est :

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \\ \varphi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^2 \\ 1 + \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \end{pmatrix}.$$

Donc $\Phi(u) = \big(\varphi, \varphi^2, \varphi^3\big)$.

Le vecteur colonne de $\Phi(v)$ dans la base canonique est :

$$AV = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\varphi^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 - \varphi^2 \end{pmatrix}.$$

Donc $\Phi(v) = \big(1, 0, 1 - \varphi^2\big)$.

Le vecteur colonne de $\Phi(w)$ dans la base canonique est :

$$AW = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\varphi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\varphi \end{pmatrix}.$$

Donc $\Phi(w) = (0, 1, -\varphi)$.

On remarque que $\Phi(u) = \varphi u$.

En utilisant 4)b), on a : $\Phi(v) = \big(1, 0, 1 - \varphi^2\big) = \left(1, 0, -\dfrac{1}{\varphi}\right) = -\dfrac{1}{\varphi} w$.

Enfin, $\Phi(w) = v - \varphi w$.

c)On vient de prouver précédemment que :

$\Phi(u) = \varphi u + 0v + 0w, \quad \Phi(v) = 0u + 0v - \dfrac{1}{\varphi} w, \quad \Phi(w) = 0u + 1v - \varphi w.$

La matrice de Φ dans la base $\mathscr{C} = (u, v, w)$ est donc : $A' = \begin{pmatrix} \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{\varphi} & -\varphi \end{pmatrix}$.

La formule de changement de base pour Φ donne alors :
$A' = Q^{-1}AQ$, c'est-à-dire : $A = QA'Q^{-1}$.
Cela mène au résultat demandé puisqu'on reconnaît en bas à droite de A' un bloc 2×2 correspondant à la matrice B.

On conclut que $A = Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1}$.

d)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $A^n = Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B^n}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1}$ ».

$$Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B^0}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1} = Q \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) Q^{-1} = QIQ^{-1} = I = A^0.$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B^n}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1} Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1} \qquad \text{par HR et 9)c)} \\ &= Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B^n}} \\ 0 & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} \varphi & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1} \\ &= Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^{n+1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B^{n+1}}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1} \qquad \text{par un calcul par blocs} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ A^n = Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B^n}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1}$

> Remarque
> Dans l'hérédité, j'ai utilisé un calcul de produit par blocs. Ce n'est pas au programme de la classe, mais vous pouvez le visualiser facilement en explicitant les coefficients de B et B^n.

Partie D (suite de Padovan)

10)a)$U_3 = U_1 + U_0 = 1 + 1 = 2$,
$U_4 = U_2 + U_1 = 1 + 1 = 2$,
$U_5 = U_3 + U_2 = 2 + 1 = 3$,
$U_6 = U_4 + U_3 = 2 + 2 = 4$
$U_7 = U_5 + U_4 = 3 + 2 = 5$.

b)De l'égalité **(1)** $U_{n+3} = U_{n+1} + U_n$, on peut en déduire deux autres en translatant n :

(2) $U_{n+2} = U_n + U_{n-1}$ et **(3)** $U_{n+1} = U_{n-1} + U_{n-2}$.

(1)-(2) donne : $U_{n+3} - U_{n+2} = U_{n+1} - U_{n-1}$.

Puis en utilisant **(3)** :

$U_{n+3} - U_{n+2} = (U_{n-1} + U_{n-2}) - U_{n-1} = U_{n-2}$.

Ces calculs ne sont valides que pour $n \geq 2$.

On a bien prouvé que $\forall n \geq 2,\ U_{n+3} - U_{n+2} = U_{n-2}$.

c)L'égalité précédente translatée en faisant $n \to n-2$ donne :
$\forall n \geq 4,\ U_{n+1} - U_n = U_{n-4} > 0$.

Donc la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante à partir de l'indice 4.

C'est une suite strictement croissante d'entiers, elle tend donc vers $+\infty$.

11)a)$X_0 = \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\forall n \in \mathbf{N},\ AX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ U_{n+2} \\ U_n + U_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ U_{n+2} \\ U_{n+3} \end{pmatrix}$.

Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ X_{n+1} = AX_n$.

b)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $X_n = A^n X_0$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $X_0 = A^0 X_0 = I X_0$ ». C'est vrai.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrosn que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \quad \text{d'après 11)a)} \\ &= A\left(A^n X_0\right) \quad \text{par HR}. \\ &= A^{n+1} X_0. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ X_n = A^n X_0$.

12)Les questions 9)d) et 11)b) donnent pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$X_n = Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B^n}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1} X_0,$$

c'est-à-dire $\begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix} = Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B^n}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans le membre de droite, les produits successifs donnent une matrice colonne dont le premier coefficient doit valoir U_n. Aussi, seule la première ligne de Q^{-1} est importante ici.

Elle est donnée par l'énoncé. On a donc en reportant :

$$\begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix} = Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B^n}} \\ 0 & & \end{array}\right) \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\varphi+3} & \dfrac{\varphi^2}{2\varphi+3} & \dfrac{\varphi}{2\varphi+3} \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En reprenant les notations de la question 7), on a :

$$\begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix} = Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_n & b_n \\ 0 & c_n & d_n \end{array}\right) \begin{pmatrix} \dfrac{1+\varphi^2+\varphi}{2\varphi+3} \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

où α et β sont des réels qu'on ne sait pas calculer, puis on obtient par produit :

$$\begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \dfrac{1+\varphi^2+\varphi}{2\varphi+3} \times \varphi^n \\ \alpha a_n + \beta b_n \\ \alpha c_n + \beta d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi^2 & -\varphi \\ \varphi & 1 & 0 \\ \varphi^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n \times \dfrac{1+\varphi^2+\varphi}{2\varphi+3} \\ \alpha a_n + \beta b_n \\ \alpha c_n + \beta d_n \end{pmatrix}.$$

En calculant la première ligne du produit de droite, on déduit finalement :

$U_n = \dfrac{1+\varphi^2+\varphi}{2\varphi+3} \times \varphi^n - \varphi^2 (\alpha a_n + \beta b_n) - \varphi (\alpha c_n + \beta d_n)$.

Posons $\epsilon_n = -\varphi^2 (\alpha a_n + \beta b_n) - \varphi (\alpha c_n + \beta d_n)$.

On a alors : $U_n = \dfrac{1+\varphi^2+\varphi}{2\varphi+3} \times \varphi^n + \epsilon_n$.

Les suites (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) convergent vers 0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$.

Et $1+\varphi^2+\varphi = \varphi^5$ d'après la question 4)b).

On conclut qu'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ tendant vers 0 quand $n \to +\infty$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ U_n = \frac{\varphi^5}{2\varphi+3} \times \varphi^n + \epsilon_n.$$

> Remarque
>
> On peut prouver que $Q^{-1} = \dfrac{1}{2\varphi+3} \begin{pmatrix} 1 & \varphi^2 & \varphi \\ -\varphi & \varphi+2 & -\varphi^2 \\ -\varphi^2 & -\varphi^4 & 2+\varphi \end{pmatrix}$.
>
> Seule la première ligne de Q^{-1} était utile ici.

Partie E (étude d'une série)

13)De la question précédente, on tire : $U_n = \dfrac{\varphi^5}{2\varphi+3} \times \varphi^n \left(1 + \dfrac{2\varphi+3}{\varphi^5} \times \dfrac{\epsilon_n}{\varphi^n}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^n$ car $\varphi > 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{2\varphi+3}{\varphi^5} \times \dfrac{\epsilon_n}{\varphi^n}\right) = 1$.

On conclut que $U_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi^5}{2\varphi+3} \times \varphi^n$.

On a donc $U_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi^5}{2\varphi+3} \times \varphi^{n+1}$, puis par quotient : $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \underset{+\infty}{\sim} \varphi$.

Cela signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \varphi$.

14)De l'équivalent précédent, on tire par inverse : $\dfrac{1}{U_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\varphi+3}{\varphi^5} \times \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n$.

La série $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n$ converge car série géométrique de paramètre $\dfrac{1}{\varphi} \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

La série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{2\varphi+3}{\varphi^5} \times \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n$ qui a même nature est donc convergente aussi.

D'après le critère d'équivalence sur les séries, $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{U_n}$ converge.

15)Soit $n \geq 4$.
La question 10)b) donne : $\forall k \geq 2,\ U_{k+3} - U_{k+2} = U_{k-2}$.
En sommant ces égalités pour $k \in [\![2, n-2]\!]$, on a :
$\sum\limits_{k=2}^{n-2} (U_{k+3} - U_{k+2}) = \sum\limits_{k=2}^{n-2} U_{k-2}$, puis par télescopage : $U_{n+1} - U_4 = \sum\limits_{k=2}^{n-2} U_{k-2}$

Or, $U_4 = 2$ et $\sum\limits_{k=2}^{n-2} U_{k-2} = \sum\limits_{j=0}^{n-4} U_j$ en posant $j = k-2$.

On conclut que $\forall n \geq 4,\ U_{n+1} = 2 + \sum\limits_{k=0}^{n-4} U_k$.

16)a)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $\forall k \in [\![0, n]\!],\ U_k \geq \varphi^{k-4}$ ».
$\mathscr{P}(4)$ s'écrit : « $\forall k \in [\![0, 4]\!]\ U_k \geq \varphi^{k-4}$ ».
Pour $k = 0$: $\varphi^{-4} = \varphi - 1 \leq 1 = U_0$.
Pour $k = 1$: $\varphi^{-3} = \dfrac{1}{\varphi^3} = \dfrac{1}{\varphi+1} \leq 1 = U_1$.
Pour $k = 2$: $\varphi^{-2} = \dfrac{1}{\varphi^2} \leq 1 = U_2$.
Pour $k = 3$: $\varphi^{-1} = \dfrac{1}{\varphi} \leq 1 = U_3$.

Pour $k=4$: $\varphi^0 = 1 \leq 2 = U_4$.

Donc $\mathscr{P}(4)$ est vraie.

Soit $n \geq 4$ entier. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ U_k \geq \varphi^{k-4}$.

En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $n-4$, on a :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-4} U_k \geq \sum_{k=0}^{n-4} \varphi^{k-4}$, puis en utilisant la question 15) : $U_{n+1} \geq 2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-4} \varphi^{k-4}$.

Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-4} \varphi^{k-4} = \varphi^{-4}\sum_{k=0}^{n-4} \varphi^k = \varphi^{-4} \times \frac{\varphi^{n-3}-1}{\varphi-1} = \varphi^{n-3} - 1$.

En reportant dans l'inégalité du dessus, on a : $U_{n+1} \geq 2 + \varphi^{n-3} - 1 \geq \varphi^{n-3}$.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \geq 4, \forall k \in [\![0,n]\!],\ U_k \geq \varphi^{k-4}$.

> Remarque
> Plus simplement, cela revient à dire que $\forall k \in \mathbf{N},\ U_k \geq \varphi^{k-4}$.

b)On déduit par inverse : $\forall k \in \mathbf{N},\ \dfrac{1}{U_k} \leq \dfrac{1}{\varphi^{k-4}}$ ou encore $\dfrac{1}{U_k} \leq \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^{k-4}$.

Les séries de terme général $\dfrac{1}{U_k}$ et $\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^{k-4}$ étant convergentes, on peut sommer les inégalités précédentes pour k allant de $n+1$ à $+\infty$, ce qui donne pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{U_k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{k-4}.$$

Or,
$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{k-4} &= \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{j+n-3} \qquad \text{en posant } j = k-n-1 \\
&= \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n-3} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{j} \\
&= \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n-3} \times \frac{1}{1-\frac{1}{\varphi}} \\
&= \frac{1}{\varphi^{n-3}} \times \frac{\varphi}{\varphi-1} \\
&= \frac{1}{\varphi^{n-8}} \quad \text{car } \varphi - 1 = \varphi^{-4} \text{ d'après 4)b).}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N},\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{U_k} \leq \frac{1}{\varphi^{n-8}}$.

17)a) $\dfrac{1}{\varphi^{n-8}} \leq 10^{-r} \iff \ln\left(\dfrac{1}{\varphi^{n-8}}\right) \leq \ln\left(10^{-r}\right)$

$$\begin{aligned} &\iff -(n-8)\ln\varphi \leq -r\ln 10 \\ &\iff (n-8)\ln\varphi \geq r\ln 10 \\ &\iff n-8 \geq \frac{r\ln 10}{\ln\varphi} \\ &\iff n \geq 8+\frac{r\ln 10}{\ln\varphi}. \end{aligned}$$

b)Par découpage de la somme, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{U_k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{U_k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{U_k}$.

On déduit : $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{U_k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{U_k}\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{U_k}$.

Lav question 16)b) donne alors : $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{U_k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{U_k}\right| \leq \frac{1}{\varphi^{n-8}}$.

Pour que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{U_k}$ soit une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{U_k}$ à 10^{-r} près, il suffit donc de prendre n tel que $\dfrac{1}{\varphi^{n-8}} \leq 10^{-r}$, soit $n \geq 8+\dfrac{r\ln 10}{\ln\varphi}$ $\quad (*)$

Par ailleurs, de l'encadrement $\varphi_{min} \leq \varphi \leq \varphi_{max}$, on déduit :

$\ln(\varphi_{min}) \leq \ln\varphi \leq \ln(\varphi_{max})$

$\dfrac{1}{\ln(\varphi_{max})} \leq \dfrac{1}{\ln\varphi} \leq \dfrac{1}{\ln(\varphi_{min})}$

$\dfrac{r\ln 10}{\ln(\varphi_{max})} \leq \dfrac{r\ln 10}{\ln\varphi} \leq \dfrac{r\ln 10}{\ln(\varphi_{min})}$

$8+\dfrac{r\ln 10}{\ln(\varphi_{max})} \leq 8+\dfrac{r\ln 10}{\ln\varphi} \leq 8+\dfrac{r\ln 10}{\ln(\varphi_{min})}$ $\quad (**)$

Compte tenu de $(*)$ et $(**)$, il suffit de prendre $n \geq 8+\dfrac{r\ln 10}{\ln(\varphi_{min})}$.

Comme $8+\dfrac{r\ln 10}{\ln(\varphi_{min})}$ n'est pas un entier, il faut arrondir à l'entier supérieur.

En posant $p = 1+\left\lfloor 8+\dfrac{r\ln 10}{\ln(\varphi_{min})}\right\rfloor$, on peut conclure alors que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}U_k$ est une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{U_k}$ à 10^{-r} près.

> Remarque
> $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{U_k}$ s'appelle le reste de la série.

Partie F (informatique)

18)Fonction f :

```
def f(x):
    y=x**3-x-1
    return y
```

19)Fonction plastique :

```
def plastique(alpha):
    a=1
    b=2
    while b-a>10**-alpha:
        c=(a+b)/2
        if f(c)<0:
            a=c
        if f(c)>0:
            b=c
    return c
```

20)Fonction Padovan :

```
def padovan(n):
    liste=[1,1,1]
    for i in range(3, n+1):
        liste.append(liste[i-3]+liste[i-2])
    return liste[n]
```

21)Fonction serie :

```
def serie(r):
    p=1+int(np.floor(8+r*np.log(10)/np.log(1.32)))
    liste = []
    for i in range(p):
        liste.append(1/padovan(i))
    return sum(liste)
```

> Remarque
> La valeur exacte de φ est donnée par la formule du mathématicien Cardan.
>
> $$\varphi = \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{69}}{18}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{69}}{18}} \approx 1,32.$$

Exercice (ecricome 2005)

1)$I_0 = \displaystyle\int_0^1 \varphi_0(x)dx = \int_0^1 e^{-2x}dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-2}}{2}$.

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \varphi_1(x)dx = \int_0^1 (1-x)e^{-2x}dx$.

On calcule I_1 à l'aide d'une intégration par parties en posant :

$f(x) = 1-x \qquad g'(x) = e^{-2x}$

$f'(x) = -1 \qquad g(x) = \dfrac{e^{-2x}}{-2}$.

f et g sont de classe C^1 sur $[0,1]$. L'IPP est valide et donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-x)e^{-2x}dx &= \left[(1-x)\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 - \int_0^1 (-1)\times\frac{e^{-2x}}{-2} \\
&= 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}dx \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(e^{-2}-1\right) \\
&= \frac{1+e^{-2}}{4}.
\end{aligned}$$

2)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{-2x}dx - \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx \\
&= \int_0^1 \left((1-x)^{n+1}e^{-2x} - (1-x)^n e^{-2x}\right) dx \\
&= \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}\big((1-x)-1\big)dx \\
&= \int_0^1 -x(1-x)^n e^{-2x}dx.
\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto -x(1-x)^n e^{-2x}$ est négative sur $[0,1]$ et les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant. Donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

On conclut que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

3)φ_n est positive sur $[0,1]$ et les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant. Donc $I_n \geq 0$.

4)La suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée (par 0) donc convergente, d'après le théorème de la limite monotone.

5)Partant de $0 \leq x \leq 1$, on tire : $0 \geq -2x \geq -2$, puis $e^0 \geq e^{-2x} \geq e^{-2}$ par croissance de l'exponentielle, c'est-à-dire $1 \geq g(x) \geq e^{-2}$.

On a donc $\forall x \in [0,1],\ g(x) \leq 1$.

6)En multipliant membre à membre l'inégalité précédente par $(1-x)^n$:
$\forall x \in [0,1],\ \varphi_n(x) \leq (1-x)^n$.
On intégre cette inégalité selon les bornes croissantes 0 et 1 :
$\displaystyle\int_0^1 \varphi_n(x) \leq \int_0^1 (1-x)^n dx$.
Or, $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
Donc $I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. De plus, $I_n \geq 0$ d'après 3).
On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
7) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
8)Faisons une IPP sur $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx$ en posant :

$f(x) = (1-x)^{n+1}$ $\qquad g'(x) = e^{-2x}$

$f'(x) = -(n+1)(1-x)^n$ $\qquad g(x) = \dfrac{e^{-2x}}{-2}$.

f et g sont de classe C^1 sur $[0,1]$ donc l'IPP est valide et donne :
$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx &= \left[(1-x)^{n+1}\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-x)^n \frac{e^{-2x}}{-2} dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2}\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx.\end{aligned}$$
Ainsi, $I_{n+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{n+1}{2} I_n$. D'où $2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n$.
9)On déduit : $2I_{n+1} = 1 - nI_n - I_n$, puis $nI_n = 1 - I_n - 2I_{n+1}$.
On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$, on a aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$. D'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = 1$.
10)Multiplions membre à membre par n l'égalité $nI_n - 1 = -I_n - 2I_{n+1}$:
$n(nI_n - 1) = -nI_n - 2nI_{n+1} = -nI_n - \dfrac{2n}{n+1}(n+1)I_{n+1}$
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+1)I_{n+1} = 1$.
Enfin, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$ car $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$. On déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n(nI_n-1) = -3$.
11)Posons $\epsilon(n) = n(nI_n - 1) + 3$. La question 10) donne : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \epsilon(n) = 0$.
En divisant membre à membre par n^2 l'égalité ci-dessus, on a :
$\dfrac{\epsilon(n)}{n^2} = I_n - \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n^2}$, c'est-à-dire : $I_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{\epsilon(n)}{n^2}$.
On a répondu à la question et trouvé $a = 0$, $b = 1$ et $c = -3$.