Correction concours blanc cubes 2025

Exercice 1 (eml 2013)

Partie I

1)g est continue sur $]0,1]$ comme produit de fonctions continues.

De plus, $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t = 0$ par croissances comparées.

Donc $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = 0 = g(0)$, ce qui montre que g est continue à droite en 0.

On conclut que g est continue sur $[0,1]$.

2)Soit $x \in]0,1[$.

Effectuons une intégration par parties sur $\displaystyle\int_x^1 g(t)dt$ en posant :

$u'(t) = -t \qquad v(t) = \ln t$

$u(t) = -\dfrac{t^2}{2} \qquad v'(t) = \dfrac{1}{t}$.

u et v sont de classe C^1 sur $[x,1]$. L'IPP est valide et donne :

$$\begin{aligned}\int_x^1 -t\ln t dt &= \left[-\frac{t^2}{2}\ln t\right]_x^1 - \int_x^1 -\frac{t^2}{2}\times\frac{1}{t}dt\\ &= 0 + \frac{x^2\ln x}{2} + \frac{1}{2}\int_x^1 tdt\\ &= \frac{x^2\ln x}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^1\\ &= \frac{x^2\ln x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_x^1 g(t)dt = \frac{x^2\ln x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{4} = 0$.

La question 2) donne alors : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 g(t)dt = \frac{1}{4}$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{4}$.

Partie II

1)• f est continue sur $]-\infty,0]$ et $[1,+\infty[$ en tant que fonction nulle.

f est continue sur $]0,1[$ comme somme et produit de fonctions continues.

De plus, $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{1/3} = 0$.

Par somme, $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 0 = f(0)$. Donc f est continue à droite en 0.

f est continue à gauche en 0 (car f est continue sur $]-\infty, 0]$) et continue à droite en 0 donc continue en 0.

On conclut que f est continue sur $]-\infty, 1[$.

• $\lim\limits_{t\to 1^+} f(t) = 0$ car f est nulle sur $]1, +\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{t\to 1^-} t\ln t = 0$ et $\lim\limits_{t\to 1^-} t^{1/3} = 1$. Par somme, $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = 1$.

$\lim\limits_{t\to 1^-} f(t) \neq \lim\limits_{t\to 1^+}$ donc f n'est pas continue en 1.

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(t)dt$ convergent et valent 0 puisque f est nulle sur $]-\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$.

Enfin, on peut remarquer que $\forall t \in]0, 1[,\ f(t) = g(t) + t^{1/3}$.

$\displaystyle\int_0^1 g(t)dt$ converge d'après I.3) et $\displaystyle\int_0^1 t^{1/3}dt$ converge car la fonction $t \mapsto t^{1/3}$ est continue sur $[0, 1]$.

D'après la propriété de Chasles, $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ converge et

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 g(t)dt + \int_0^1 t^{1/3}dt = \frac{1}{4} + \left[\frac{t^{4/3}}{4/3}\right]_0^1 = 1.$$

On conclut par Chasles de nouveau que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

De plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} f(t)dt = 1$.

3)• f est continue sur $\mathbf{R}$ sauf en 1

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1

• Pour $t \in]0, 1[$, on a : $\ln t < 0$ donc $-t\ln t > 0$ et $t^{1/3} > 0$.
Par somme, $\forall t \in]0, 1[,\ f(t) > 0$.
De plus, $\forall t \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[,\ f(t) = 0$.
On a finalement, $\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) \geq 0$.

Ces 3 points prouvent que f est une densité.

4)a) f est de classe C^2 sur $]0, 1[$ comme somme et produit de fonctions de classe C^2.

Pour tout $t \in]0, 1[$, on a :

$f'(t) = -\ln t - t \times \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{3}t^{-2/3} = -\ln t - 1 + \dfrac{1}{3}t^{-2/3}$ et $f''(t) = -\dfrac{1}{t} - \dfrac{2}{9}t^{-5/3}$.

b)• $\forall t \in]0,1[,\ f''(t) < 0$ donc f' est strictement décroissante sur $]0,1[$.
Par ailleurs, f' est continue sur $]0,1[$.
Donc f' réalise une bijection de $]0,1[$ sur $f'\big(]0,1[\big) = \left]\lim\limits_{t\to 1^-} f'(t), \lim\limits_{t\to 0^+} f'(t)\right[$.

$\lim\limits_{t\to 1^-} f'(t) = \lim\limits_{t\to 1^-} \left(-\ln t - 1 + \dfrac{1}{3}t^{-2/3}\right) = -\dfrac{2}{3}$.

$\lim\limits_{t\to 0^+} f'(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \left(-\ln t - 1 + \dfrac{1}{3}t^{-2/3}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{t\to 0^+} -\ln t = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{-2/3} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{t^{2/3}} = +\infty$.

Ainsi, f' est une bijection de $]0,1[$ sur $\left]-\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$.

$0 \in \left]-\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$ admet donc un unqiue antécédent $\alpha \in]0,1[$ par f, ce qui prouve que l'équation $f'(t) = 0$ a une unique solution $\alpha \in]0,1[$.

• $f'\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) - 1 + \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{e}\right)^{-2/3} = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{e}\right)^{-2/3} > 0$,
$f'(\alpha) = 0$,
$f'(1) = -\dfrac{2}{3} < 0$.

On a donc $f'(1) < f'(\alpha) < f'\left(\dfrac{1}{e}\right)$.

Par stricte décroissance de f' sur $]0,1[$, on conclut : $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$.

c)programme

```
import numpy as np
def fprime(t):
    y=-np.log(t)-1+t**(-2/3)/3
    return y
a=1/np.exp(1)
b=1
while b-a>10**-3:
    c=(a+b)/2
    if fprime(c)<0:
        b=c
    if fprime(c)>0:
        a=c
print(c)
```

Remarque
Python renvoie $\alpha \approx 0,59$.

Partie III

1)Soit $x \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}\int_x^1 f(t)dt &= \int_x^1 \left(g(t)+t^{1/3}\right)dt\\ &= \int_x^1 g(t)dt + \int_x^1 t^{1/3}dt\\ &= \frac{x^2\ln x}{2}+\frac{1}{4}-\frac{x^2}{4}+\left[\frac{t^{4/3}}{4/3}\right]_x^1 \quad \text{d'après I.2)}\\ &= \frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{3}{4}x^{4/3}+1.\end{aligned}$$

2)Par définition, on a : $\forall x \in \mathbf{R},\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)dt.$

• premier cas : $x \leq 0$

f est nulle sur $]-\infty,0]$ donc sur $]-\infty,x]$. On a alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x 0dt = 0.$

• deuxième cas : $x \in]0,1[$

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt\\ &= \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt\\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 f(t)dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^1 f(t)dt}_{=1} - \int_x^1 f(t)dt \quad \text{d'après } I.2)\\ &= -\frac{x^2\ln x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{3}{4}x^{4/3} \quad \text{d'après } III.1)\end{aligned}$$

• troisième cas : $x \geq 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt - \int_x^{+\infty} f(t)dt = 1 - \int_x^{+\infty} f(t)dt.$$

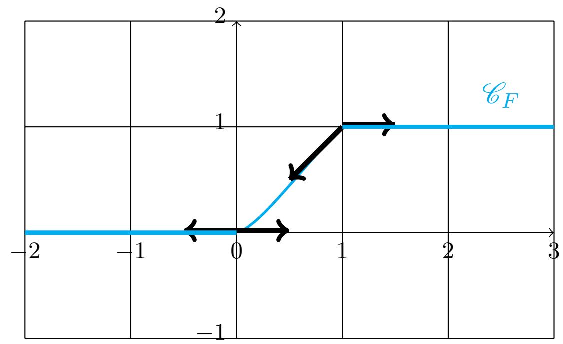
f est nulle sur $[1,+\infty[$ donc sur $[x,+\infty[$. Donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt = \int_x^{+\infty} 0dt = 0.$

Donc $F(x) = 1$.

En conclusion, on a :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0\\ -\dfrac{x^2\ln x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3}{4}x^{4/3} & \text{si } 0 < x < 1\\ 1 & \text{si } x \geq 1.\end{cases}$$

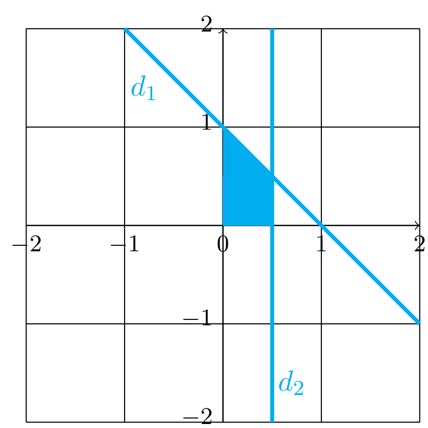
3)Courbe de F



Remarque
F est croissante sur $\mathbf{R}$ en tant que fonction de répartition et continue sur $\mathbf{R}$ puisque X est à densité.
F est dérivable aux points où f est continue, F est donc dérivable sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.
F est en particulier dérivable en 0 et $F'(0) = f(0) = 0$.
En revanche, F n'est pas dérivable en 1 avec $F'_d(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$ et $F'_g(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$.

Partie IV

1)On commence par tracer les droites :
d_1 d'équation $x + y = 1$, c'est-à-dire $y = -x + 1$,
d_2 d'équation $2x = 1$, c'est-à-dire $x = \dfrac{1}{2}$.
Les points de D sont ceux situés dans le quart de plan d'abscisses et d'ordonnées positives, mais également sous d_1 et à gauche de d_2.



2)• La fonction $(x,y) \mapsto x+y$ est polynomiale donc de classe C^1 sur D et prend ses valeurs dans $]0,1[$. Quant à f, elle est de classe C^1 sur $]0,1[$ par produit et somme de fonctions de classe C^1.
Par composée, la fonction $(x,y) \mapsto f(x+y)$ est de classe C^1 sur D.

La fonction $(x,y) \mapsto 2x$ est polynomiale donc de classe C^1 sur D et prend ses valeurs dans $]0,1[$. Quant à f, elle est de classe C^1 sur $]0,1[$.
Par composée, la fonction $(x,y) \mapsto f(2x)$ est de classe C^1 sur D.

Par différence, G est de classe C^1 sur D.

• Pour tout $(x,y) \in D$, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_1 G(x,y) &= \partial_1\left(f(x+y) - \frac{1}{2}f(2x)\right)\\
&= \partial_1(x+y) \times f'(x+y) - \frac{1}{2} \times 2f'(2x) \quad \text{par dérivation composée}\\
&= 1 \times f'(x+y) - f'(2x)\\
&= f'(x+y) - f'(2x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_2 G(x,y) &= \partial_2\left(f(x+y) - \frac{1}{2}f(2x)\right)\\
&= \partial_2(x+y) \times f'(x+y) - 0 \quad \text{par dérivation composée}\\
&= 1 \times f'(x+y)\\
&= f'(x+y).
\end{aligned}$$

3)Soit $(x,y) \in D$.

(x,y) est un point critique de G

$$\iff \begin{cases} \partial_1 G(x,y) = 0 \\ \partial_2 G(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f'(x+y) - f'(2x) = 0 \\ f'(x+y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f'(2x) = 0 \\ f'(x+y) = 0 \end{cases}$$

4)D'après II.4.b), l'équation $f'(t) = 0$ a une seule solution α sur $]0,1[$.

Or, si $(x,y) \in D$, on a : $0 < 2x < 1$ et $0 < x+y < 1$. On déduit :

$$\begin{cases} f'(2x) = 0 \\ f'(x+y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = \alpha \\ x+y = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha/2 \\ y = \alpha/2 \end{cases}$$

Ainsi, $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$ est l'unique point critique de G.

5)G est de classe C^2 sur D car ses dérivées partielles d'ordre 1 sont de classe C^1 sur D (faire le même type de raisonnement que pour IV.2)).
Elle admet des dérivées partielles secondes données par :

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,1} G(x,y) &= \partial_1\left(\partial_1 G(x,y)\right)\\
&= \partial_1\big(f'(x+y) - f'(2x)\big)\\
&= \partial_1(x+y) \times f''(x+y) - 2f''(2x)\\
&= 1 \times f''(x+y) - 2f''(2x)\\
&= f''(x+y) - 2f''(2x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial^2_{2,1}G(x,y) &= \partial_2\left(\partial_1 G(x,y)\right)\\ &= \partial_2\big(f'(x+y)-f'(2x)\big)\\ &= \partial_2(x+y)\times f''(x+y)-0\\ &= 1\times f''(x+y)\\ &= f''(x+y).\end{aligned}$$

f est de classe C^2 sur D donc d'après le théorème de Schwarz :
$\partial^2_{1,2}G(x,y)=\partial^2_{2,1}G(x,y)=f''(x+y)$.

$$\begin{aligned}\partial^2_{2,2}G(x,y) &= \partial_2\left(\partial_2 G(x,y)\right)\\ &= \partial_2\big(f'(x+y)\big)\\ &= \partial_2(x+y)\times f''(x+y)\\ &= 1\times f''(x+y)\\ &= f''(x+y).\end{aligned}$$

Si G admet un extrémum local, ce ne peut être qu'au point critique $(\alpha/2,\alpha/2)$.
La matrice hessienne de G au point $(\alpha/2,\alpha/2)$ est :

$$A=\begin{pmatrix}\partial^2_{1,1}G(\alpha/2,\alpha/2) & \partial^2_{1,2}G(\alpha/2,\alpha/2)\\ \\ \partial^2_{2,1}G(\alpha/2,\alpha/2) & \partial^2_{2,2}G(\alpha/2,\alpha/2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-f''(\alpha) & f''(\alpha)\\ f''(\alpha) & f''(\alpha)\end{pmatrix}.$$

λ est valeur propre de A

$\Longleftrightarrow A-\lambda I$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}-f''(\alpha)-\lambda & f''(\alpha)\\ f''(\alpha) & f''(\alpha)-\lambda\end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow \left(-f''(\alpha)-\lambda\right)\left(f''(\alpha)-\lambda\right)-f''(\alpha)^2=0$

$\Longleftrightarrow \lambda^2-2f''(\alpha)^2=0$

$\Longleftrightarrow \lambda=\pm\sqrt{2}f''(\alpha)$.

Les valeurs propres de G sont non nulles et de signes contraires. Donc G n'admet pas d'extrémum local en $(\alpha/2,\alpha/2)$. C'est un point selle.

Exercice 2 (ecricome 2004)

Partie I :

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$

$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - 2L_3 \end{array}$

$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_2 - 5L_3 \end{array}$

$\sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 & -10 \\ 0 & 10 & 10 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \\ L_3 \end{array}$

$\sim \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & -40 & -60 \\ 0 & 10 & 10 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 5L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \leftarrow (1/20)L_1 \\ L_2 \leftarrow (1/10)L_2 \\ L_3 \leftarrow (1/2)L_3 \end{array}$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2)a)$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b)$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On déduit $\forall n \geq 3,\ T^n = T^3 T^{n-3} = 0T^{n-3} = 0$.

3)Remarquons d'abord que $T = PAP^{-1} \iff P^{-1}T = AP^{-1} \iff A = P^{-1}TP =$ (résultat très classique).

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $A^n = P^{-1}T^nP$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $A^0 = P^{-1}T^0P$ », c'est-à-dire « $I = P^{-1}IP$ », ce qui est vrai.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^nA \\ &= \left(P^{-1}T^nP\right)\left(P^{-1}TP\right) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= P^{-1}T^nITP \\ &= P^{-1}T^{n+1}P. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ A^n = P^{-1}T^nP$.

De la question 2)b), on déduit que $\forall n \geq 3,\ A^n = P^{-1}0P = 0$.

4)a)Pour tout $(t, t') \in \mathbf{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} E(t)E(t') &= \left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2\right)\left(I + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2\right) \\ &= I + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2 + tA + tt'A^2 + \frac{tt'^2}{2}A^3 + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^2t'}{2}A^3 + \frac{t^2t'^2}{4}A^4 \\ &= I + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2 + tA + tt'A^2 + \frac{t^2}{2}A^2 \quad \text{car } A^3 = A^4 = 0 \\ &= I + (t+t')A + \left(\frac{t'^2}{2} + tt' + \frac{t^2}{2}\right)A^2 \\ &= I + (t+t')A + \frac{t'^2 + 2tt' + t^2}{2}A^2 \\ &= I + (t+t')A + \frac{(t+t')^2}{2}A^2 \\ &= E(t+t'). \end{aligned}$$

b)En appliquant la question précédente avec $t' = -t$, on obtient :

$\forall t \in \mathbf{R},\ E(t)E(-t) = E(0) = I.$

On déduit que $E(t)$ est inversible et que $\left(E(t)\right)^{-1} = E(-t)$, c'est-à-dire :

$\forall t \in \mathbf{R},\ \left(E(t)\right)^{-1} = I - tA + \dfrac{t^2}{2}A^2.$

c)Soit $t \in \mathbf{R}$ et soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $\left(E(t)\right)^n = E(nt)$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $\left(E(t)\right)^0 = E(0)$ », c'est-à-dire « $I = I$ », ce qui est vrai.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}\big(E(t)\big)^{n+1} &= \big(E(t)\big)^n E(t)\\ &= E(nt)E(t) \quad \text{par hypothèse de récurrence}\\ &= E(nt+t) \quad \text{grâce à 4)a)}\\ &= E\big((n+1)t\big).\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ \big(E(t)\big)^n = E(nt)$.

On a donc $\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in \mathbf{R},\ \big(E(t)\big)^n = I + ntA + \dfrac{n^2t^2}{2}A^2$.

Partie II :

1)λ est valeur propre de B

$\iff \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\iff (-\lambda)(3-\lambda) - 2 \times (-1) = 0$

$\iff \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\iff \lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

Les valeurs propres de B sont donc 1 et 2.

$B \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ admet deux valeurs propres distinctes. Donc B est diagonalisable.

2)Cherchons les sous-espaces propres de B.

$E_1(B) = \{U \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \mid (B-I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$(B-I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} -x-y &=& 0 \\ 2x+2y &=& 0 \end{array}\right.$

$\iff y = -x$.

Donc $E_1(B) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = -x\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

$E_2(B) = \{U \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \mid (B-2I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$(B-2I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x-y &=& 0 \\ 2x+y &=& 0 \end{array}\right.$

$\iff y = -2x$.

Donc $E_2(B) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = -2x\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

B est diagonalisable. Elle peut donc s'écrire sous la forme : $B = QDQ^{-1}$, où :

– Q est une matrice inversible dont les colonnes sont formées des bases des sous-espaces propres de B,

$-$ D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de B.

On prend $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Et on a bien $B = QDQ^{-1}$ ou encore $Q^{-1}BQ = D$.

3)Un calcul facile donne $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Puis, grâce à une récurrence comme dans la question I)3) :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbf{N},\ B^n &= QD^nQ^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ -1 & -2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4)\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in \mathbf{R},\ E_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} B^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 2-2^k & 1-2^k \\ 2^{k+1}-2 & 2^{k+1}-1 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \frac{(2-2^k)t^k}{k!} & \frac{(1-2^k)t^k}{k!} \\ \frac{(2^{k+1}-2)t^k}{k!} & \frac{(2^{k+1}-1)t^k}{k!} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k-(2t)^k}{k!} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k-(2t)^k}{k!} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2(2t)^k-2t^k}{k!} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2(2t)^k-t^k}{k!} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $a_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k-(2t)^k}{k!}$, $b_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2(2t)^k-2t^k}{k!}$, $c_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k-(2t)^k}{k!}$ et $d_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2(2t)^k-t^k}{k!}$.

5)Par linéarité, $a_n(t) = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$.

On reconnaît deux sommes partielles d'une série exponentielle de paramètres respectifs t et $2t$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} a_n(t) = 2e^t - e^{2t}$.

De même, $\lim_{n\to+\infty} b_n(t) = 2e^{2t} - 2e^t$, $\lim_{n\to+\infty} c_n(t) = e^t - e^{2t}$, $\lim_{n\to+\infty} d_n(t) = 2e^{2t} - e^t$.

6)a)La question 5) donne immédiatement : $E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$.

b)$E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^t \\ -2e^t & -e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{2t} & -e^{2t} \\ 2e^{2t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Posons $E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

On a alors : $\forall t \in \mathbf{R},\ E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2$.

c)On obtient immédiatement : $E_1^2 = E_1$, $E_2^2 = E_2$, $E_1E_2 = 0$ et $E_2E_1 = 0$.

d)$\forall t \in \mathbf{R},\ E(t)E(-t) = \left(e^t E_1 + e^{2t} E_2\right)\left(e^{-t} E_1 + e^{-2t} E_2\right)$

$$\begin{aligned} &= E_1^2 + e^{-t} E_1 E_2 + e^t E_2 E_1 + E_2^2 \\ &= E_1 + E_2 \quad \text{grâce à 6)c)} \\ &= I. \end{aligned}$$

Donc pour t réel, $E(t)$ est inversible et $\left(E(t)\right)^{-1} = E(-t)$.

Problème (edhec 2018)

Partie I

1)a)$\forall t \in \mathbf{R},\ 1+t^2 \geq 1$ donc $\ln(1+t^2) \geq 0$.

Distinguons 2 cas :

• $x \geq 0$

La fonction $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est positive donc en intégrant selon les bornes croissantes 0 et x, on a :

$\displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)dt \geq 0$, soit $f(x) \geq 0$.

• $x \leq 0$

La fonction $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est positive donc en intégrant selon les bornes croissantes x et 0, on a :

$\displaystyle\int_x^0 \ln(1+t^2)dt \geq 0$. Or, $f(x) = -\displaystyle\int_x^0 \ln(1+t^2)dt$ donc $f(x) \leq 0$.

b)La fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est continue sur $\mathbf{R}$ comme composée de fonctions continues.

D'après le cours, f est une primitive sur $\mathbf{R}$ de $x \mapsto \ln(1+x^2)$.

f est donc dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \ln(1+x^2).$$

Enfin, f' est continue sur $\mathbf{R}$. Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

c)$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $\mathbf{R}$.

2)a)Il faut établir que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(-x) = -f(x)$.

Dans l'intégrale définissant $f(-x)$, en faisant le changement de variable $u = -t$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_0^{-x} \ln(1+t^2)dt \\ &= \int_0^{x} \ln\big(1+(-u)^2\big) \times (-1)du \\ &= -\int_0^{x} \ln\big(1+u^2\big)du \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Donc f est impaire.

> Remarque
> $u = -t \iff t = -u$. La fonction $\varphi : u \mapsto -u$ est de classe C^1 sur $[0,x]$, ce qui valide la formule de changement de variable.

b)f' est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme composée de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbf{R},\ f''(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

f'' est négative sur $]-\infty, 0]$, puis positive sur $[0, +\infty[$.

f est donc concave sur $]-\infty, 0]$, puis convexe sur $[0, +\infty[$.

$\mathscr{C}_f$ possède donc un point d'inflexion au point I d'abscisse 0.

L'ordonnée de I est : $f(0) = \displaystyle\int_0^0 \ln(1+t^2)dt = 0$. Donc $I(0,0)$.

3)a)$\forall t \in \mathbf{R},\ \dfrac{t^2}{1+t^2} = a + \dfrac{b}{1+t^2}$

$\iff \forall t \in \mathbf{R},\ \dfrac{t^2}{1+t^2} = \dfrac{a(1+t^2)+b}{1+t^2}$

$\iff \forall t \in \mathbf{R},\ \dfrac{t^2}{1+t^2} = \dfrac{(a+b)+at^2}{1+t^2}$

$\iff \forall t \in \mathbf{R},\ t^2 = (a+b) + at^2$

$\iff \begin{cases} a+b & = 0 \\ a & = 1 \end{cases}$ par identification

$\iff a = 1$ et $b = -1$

> Remarque
> On pouvait aussi utiliser l'astuce bien connue :
> $\dfrac{t^2}{1+t^2} = \dfrac{(t^2+1)-1}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$.

b)Soit x un réel.

Effectuons une intégration par parties sur $\displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)dt$ en posant :

$u(t) = \ln(1+t^2) \qquad v'(t) = 1$

$u'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} \qquad v(t) = t$

u et v sont de classe C^1 sur $[0, x]$. L'IPP est valide et donne :

$$\int_0^x \ln(1+t^2)dt = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^x - \int_0^x \frac{2t}{1+t^2} \times t\ dt$$

c'est-à-dire $f(x) = x\ln(1+x^2) - 2\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt \qquad (*)$

Par ailleurs, la question 3)a) donne :

$$\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \int_0^x 1dt - \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = x - \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt.$$

En reportant dans $(*)$, on déduit :

$f(x) = x\ln(1+x^2) - 2\left(x - \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt\right) = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt.$

Ainsi, $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x\left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt.$

4)a)La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est une intégrale impropre en $+\infty$.

$\frac{1}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (intégrale de Riemann en $+\infty$ de paramètre $2 > 1$)

D'après le critère d'équivalence sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ converge.

$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$ converge également car $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0, 1]$ (ce n'est pas une intégrale impropre).

D'après la propriété de Chasles, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ converge.

> Remarque
> On peut prouver que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$.

b)En développant 3)b) et en factorisant le membre de droite par $x\ln(1+x^2)$, on obtient pour tout $x > 0$:

$f(x) = x\ln(1+x^2)\left(1 - \frac{2}{\ln(1+x^2)} + \frac{2}{x\ln(1+x^2)}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt\right).$

$\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\ln(1+x^2)} = 0.$

On a aussi $\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+x^2) = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x\ln(1+x^2)} = 0.$

Enfin, $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt =$ constante.

Par somme et produit, on déduit que la grande parenthèse tend vers 1 quand $x \to +\infty$.

Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x\ln(1+x^2)} = 1$, ce qui prouve que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln(1+x^2)$.

c)• Pour tout $x > 0$, on a :

$\ln(1+x^2) = \ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2} + 1\right) = 2\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$

• On déduit : $\dfrac{\ln(1+x^2)}{2\ln x} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\ln x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{t\to 1} \ln t = 0$.

Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln x = +\infty$, par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\ln x} = 0$.

On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{2\ln x} = 1$, ce qui prouve que $\ln(1+x^2) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln x$.

Par ailleurs, $x \underset{+\infty}{\sim} x$. Par produit d'équivalents, $x\ln(1+x^2) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln x$.

La question 4)b) donne par transitivité : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln x$.

d)f étant impaire, on sait que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = -f(-x)$. L'équivalent précédent se réécrit :

$-f(-x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln x$, soit $f(-x) \underset{+\infty}{\sim} -2x\ln x$.

Posons enfin $t = -x$. Quand $x \to +\infty$, $t \to -\infty$.

L'équivalent devient : $f(t) \underset{-\infty}{\sim} 2t\ln(-t)$.

En renommant t en x, on conclut : $f(x) \underset{-\infty}{\sim} 2x\ln(-x)$.

5)a)On a vu que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et que $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \ln(1+x^2)$. f' est alors de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ comme comme composée de fonctions de classe C^2. Ainsi, f est de classe C^3 sur $\mathbf{R}$.

b)$f(0) = \displaystyle\int_0^0 \ln(1+t^2)dt = 0$ et $f'(0) = \ln 1 = 0$.

De plus, $\forall x \in \mathbf{R},\ f''(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, ce qui donne $f''(0) = 0$.

Enfin, $\forall x \in \mathbf{R},\ f^{(3)}(x) = \dfrac{2(1+x^2) - (2x)\times(2x)}{(1+x^2)^2}$ donne $f^{(3)}(0) = 2$.

c)La formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 3 donne alors :

$f(x) = \dfrac{2}{3!}x^3 + o\left(x^3\right)$, soit $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$.

On déduit : $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$.

6)a)Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}[0,1]$. Une densité de X est :

$$f_X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Posons $g : t \mapsto \ln(1+t^2)$.

On a alors : $f(1)=\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t)dt=E\left(g(X)\right)$
grâce au théorème de transfert.
b)programme

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
U=[1+rd.random()**2 for k in range(100000)]
V=np.log(U)
f=np.mean(V)
print(f)
```

Remarque
V est une liste formée de 100000 simulations de la variable aléatoire $g(X)$.
f est la moyenne des valeurs de V, valeur très proche de l'espérance de $g(X)$, en vertu de la loi faible des grands nombres.
Python trouve $f(1)\approx 0,26$.

Partie II

7)a)$u_0=\displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^0 dt=\int_0^1 1dt=[t]_0^1=1$, valeur de l'énoncé.
b)$u_1=\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)dt=f(1)$.
8)a)Soit $n\in\mathbf{N}$.
Pour $0\leq t\leq 1$, on a : $t^2\leq 1$, puis $1+t^2\leq 2$.
D'où, $\ln(1+t^2)\leq\ln 2$, par croissance de ln.
Comme $\ln 2\leq 1$, on a finalement $\forall t\in[0,1],\ \ln(1+t^2)\leq 1$.
En multipliant membre à membre par $\left(\ln(1+t^2)\right)$, quantité positive, on a :
$\forall t\in[0,1],\ \left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1}\leq\left(\ln(1+t^2)\right)^n$.
En intégrant entre les bornes croissantes 0 et 1, on conclut :
$\displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1} dt\leq\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$, c'est-à-dire $u_{n+1}\leq u_n$.
Donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
b)Pour $0\leq t\leq 1$, on a : $t^2\geq 0$, puis $1+t^2\geq 1$ et $\ln(1+t^2)\geq 0$.
On déduit : $\forall n\in\mathbf{N},\forall t\in[0,1],\ \left(\ln(1+t^2)\right)^n\geq 0$.
Les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant, par positivité, on déduit : $\displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt\geq 0$, c'est-à-dire $u_n\geq 0$.
La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée (par 0) donc convergente, d'après le théorème de la limite monotone.

9)a)Soit $n \in \mathbf{N}$.
On sait déjà que $u_n \geq 0$.
On a montré dans la question précédente que $\forall t \in [0,1],\ \ln(1+t^2) \leq \ln 2$.
Par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbf{R}_+$, on déduit :

$$\forall t \in [0,1],\ \left(\ln(1+t^2)\right)^n \leq (\ln 2)^n .$$

En intégrant entre les bornes croissantes 0 et 1, on conclut :

$$\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt \leq \int_0^1 (\ln 2)^n\, dt$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 (\ln 2)^n\, dt = [(\ln 2)^n]_0^1 = (\ln 2)^n$. On déduit : $u_n \leq (\ln 2)^n$.
On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$.
b)• $\ln 2 \approx 0,7$ donc $-1 < \ln 2 < 1$. Cela entraîne que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\ln 2)^n = 0$.
D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

• $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (\ln 2)^n$ converge-série géométrique de paramètre $\ln 2 \in]-1,1[$.
D'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs,
$\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

10)a)Pour tout $t \in [0,1]$, on a : $\ln(1+t^2) \leq \ln 2$, puis $-\ln(1+t^2) \geq -\ln 2$ et $1-\ln(1+t^2) \geq 1-\ln 2 > 0$.
Par inverse, $0 \leq \dfrac{1}{1-\ln(1+t^2)} \leq \dfrac{1}{1-\ln 2}$.
En multipliant membre à membre par $\left(\ln(1+t^2)\right)^n$, on a :

$$\forall t \in [0,1],\ 0 \leq \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} \leq \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln 2}.$$

En intégrant ces inégalités entre les bornes croissantes 0 et 1, on conclut :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leq \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln 2} dt.$$

Enfin, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln 2} dt = \frac{1}{1-\ln 2}\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt = \frac{u_n}{1-\ln 2}$.
Ainsi, $\displaystyle 0 \leq \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leq \frac{u_n}{1-\ln 2}$.
b)On a vu que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{1-\ln 2} = 0$.
La question 10)a) donne avec gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt = 0$.

c)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^k dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\ln(1+t^2)\right)^k dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt.\end{aligned}$$

Remarque

On a utilisé la formule bien connue :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ avec $q = \ln(1+t^2) \neq 1$ et $n \to n-1$.

d)
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1-\ln(1+t^2)} - \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}\right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} dt - \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt\end{aligned}$$

On a vu dans 10)b) que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt = 0$.

En passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} dt.$$

c'est-à-dire, compte tenu de 10)c) :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} dt.$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} dt$.

e)On reprend l'idée du script 6)b), mais en prenant $g : t \mapsto \dfrac{1}{1-\ln(1+t^2)}$

qu'on construit par composée de $t \mapsto 1+t^2$, suivie de $h : t \mapsto \dfrac{1}{1-\ln t}$.

Le programme ci-dessous renvoie alors une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} dt$,

c'est-à-dire de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def h(x):
    return 1/(1-np.log(x))
U=[1+rd.random()**2 for k in range(100000)]
V=h(U)
f=np.mean(V)
print(f)
```

Python renvoie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \approx 1,52$.