

## EXERCICE 1

Dans tout l'exercice,  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  désigne un espace probablisé et toutes les variables aléatoires considérées seront supposées définies sur cet espace.

### Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie,  $\lambda$  désigne un réel strictement positif.

1. Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .
2. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx, \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

3. (a) soit  $U$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[0, 1[$ . Quelle est la loi de la variable aléatoire  $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ ?

- (b) En Python, la fonction `random()` du module `numpy.random` renvoie un réel aléatoire de  $[0, 1[$ .

A l'aide de la question 3)a), écrire une fonction Python d'en-tête `def expo(L)` :

prenant comme paramètre un réel  $L$  strictement positif et renvoyant la valeur d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre  $L$ .

On considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on définit la variable aléatoire  $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$  qui, à tout  $\omega$  de  $\Omega$ , associe le plus grand des réels  $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$  et on note  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_n(x) = \begin{cases} ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

### Partie II : Loi de la variable aléatoire $T_n$

4. (a) Calculer, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et pour tout réel  $x \geq 0$ , la probabilité  $P(T_n \leq x)$ .  
(b) En déduire que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $T_n$  est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction  $f_n$ .
5. (a) Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , la variable aléatoire  $T_n$  admet une espérance.  
(b) Déterminer l'espérance  $E(T_1)$  de  $T_1$  et l'espérance  $E(T_2)$  de  $T_2$ .
6. (a) Vérifier que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$ .  
(b) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x))dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx.$$

- (c) En déduire, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , une relation entre  $E(T_{n+1})$  et  $E(T_n)$ , puis une expression de  $E(T_n)$  sous forme d'une somme.

### Partie III : Loi du premier dépassement

Dans toute cette partie,  $a$  désigne un réel strictement positif.

On définit la variable aléatoire  $N$  égale au plus petit entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  tel que  $X_n > a$  si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité d'événements :  $(N = 0) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_k \leq a)$ . En déduire la probabilité  $P(N = 0)$ .
8. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(N = n) = (1 - e^{-a})^{n-1} e^{-a}$ .
9. Déterminer l'espérance  $E(N)$  et la variance  $V(N)$  de  $N$ .

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire  $Z$ , définie pour tout  $\omega$  de  $\Omega$  par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}$$

10. Justifier que  $P(Z \leq a) = 0$ .
11. Soit  $x \in ]a, +\infty[$ 
  - (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , justifier l'égalité d'événements :

$$(N = n) \cap (Z \leq x) = \begin{cases} (a < X_1 \leq x) & \text{si } n = 1 \\ (T_{n-1} \leq a) \cap (a < X_n \leq x) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

En déduire la probabilité  $P((N = n) \cap (Z \leq x))$ .

- (b) Montrer alors que  $P(Z \leq x) = 1 - e^{a-x}$ .
12. (a) Montrer que la variable aléatoire  $Z - a$  suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
  - (b) En déduire l'existence et la valeur de  $E(Z)$ , ainsi que l'existence et la valeur de  $V(Z)$ .

## EXERCICE 2

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant :  $2 < e < 3$ .

### Partie I : Etude d'une fonction

On considère l'application  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = x^2 e^x - 1.$$

1. Dresser le tableau de variations de  $\varphi$ . Préciser la limite de  $\varphi$  en  $-\infty$ , sa valeur en 0 et sa limite en  $+\infty$ .
2. Etablir que l'équation  $e^x = \frac{1}{x^2}$ , d'inconnue  $x \in ]0; +\infty[$ , admet une solution et une seule, notée  $\alpha$ , et que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$ .

On considère l'application  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 e^x.$$

On définit la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

### Partie II : Etude d'une suite

3. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$ .
4. Etablir que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
5. Quelle est la limite de  $u_n$  lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini ?

### Partie III : Etude d'une série

6. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{f(n)}$  converge. On note  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$ .
7. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}$ .
8. En déduire une fonction en Python qui calcule une valeur approchée de  $S$  à  $10^{-4}$  près.

### Partie IV : Etude d'une fonction de deux variables

On considère l'ouvert  $U = ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  de  $\mathbb{R}^2$  et la fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$  définie par

$$\forall (x, y) \in U, g(x, y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y.$$

9. Représenter graphiquement l'ensemble  $U$ .
10. Calculer, pour tout  $(x, y)$  de  $U$ , les dérivées partielles premières de  $g$  en  $(x, y)$ .
11. Montrer que  $g$  admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont  $(\alpha, 0)$  et  $(\alpha, -2)$ , où  $\alpha$  est le réel défini à la question 2.
12. Est-ce que  $g$  admet un extremum local en  $(\alpha, 0)$  ?
13. Est-ce que  $g$  admet un extremum local en  $(\alpha, -2)$  ?
14. Est-ce que  $g$  admet un extremum global sur  $U$  ?

### EXERCICE 3

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3. On note  $0_E$  le vecteur nul de  $E$ .

On note  $i$  l'application identité de  $E$ , et  $\theta$  l'application constante nulle de  $E$  dans  $E$ .

On a donc  $i : x \mapsto x$  et  $\theta : x \mapsto 0_E$ .

On considère un endomorphisme  $f$  de  $E$  tel que :

$$f \neq \theta, f^2 + i \neq \theta \text{ et } f \circ (f^2 + i) = \theta$$

où  $f^2$  désigne  $f \circ f$ .

1. (a) Montrer que  $f$  n'est pas bijectif.  
(b) En déduire que 0 est valeur propre de  $f$ , puis montrer qu'il existe  $u$  appartenant à  $E$  tel que :  
 $u \neq 0_E$  et  $f(u) = 0_E$ .  
Soit  $v_1$  appartenant à  $E$  tel que :  $v_1 \neq 0_E$  et  $f(v_1) = 0_E$ .
2. Montrer que  $\text{sp}(f) = \{0\}$ .
3. Est-ce que  $f$  est diagonalisable ?
4. Montrer que  $f^2 + i$  n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe  $v$  appartenant à  $E$  tel que :  
 $v \neq 0_E$  et  $f^2(v) = -v$ .

Soit  $v_2$  appartenant à  $E$  tel que :  $v_2 \neq 0_E$  et  $f^2(v_2) = -v_2$ . On note  $v_3 = f(v_2)$ .

5. Montrer que  $f(v_3) = -v_2$ .
6. (a) Montrer que la famille  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $E$ .  
(b) Déterminer la matrice  $C$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Soit  $\mathcal{F}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  engendré par  $(A, B, C)$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \{aA + bB + cC; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

7. Déterminer la dimension de  $\mathcal{F}$ .
8. Montrer que  $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); CM = MC\} = \mathcal{F}$ .
9. (a) Pour tout  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , calculer la matrice  $(aA + bB + cC)^2$ .  
(b) En déduire une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que :  $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$ .
10. On note  $g = f^2 - i$ .  
Montrer que  $g$  est bijectif et exprimer  $g^{-1}$  à l'aide de  $f$  et de  $i$ .