Correction DM5

<u>Exercice</u> (edhec 2018 revisité)

1)$\det A = 1 \times 6 - 2 \times 3 = 0$. Donc A n'est pas inversible.

2)λ est valeur propre de A
$\iff A - \lambda I$ n'est pas inversible
$\iff \det(A - \lambda I) = 0$
$\iff (1-\lambda)(6-\lambda) - 2 \times 3 = 0$
$\iff \lambda^2 - 7\lambda = 0$
$\iff \lambda(\lambda - 7) = 0$
$\iff \lambda = 0$ ou $\lambda = 7$.

Déterminons les sous-espaces propres de A associés à 0 et à 7.

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} U \in E_0(A) &\iff AU = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 0 \\ 3x & + & 6y & = & 0 \end{array} \right. . \\ &\iff x = -2y \end{aligned}$$

Donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x = -2y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_0(A)$ et elle est libre car constituée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_0(A)$.

$$\begin{aligned} U \in E_7(A) &\iff (A - 7I)U = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} -6x & + & 2y & = & 0 \\ 3x & - & y & = & 0 \end{array} \right. . \\ &\iff y = 3x \end{aligned}$$

Donc $E_7(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = 3x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_7(A)$ et elle est libre car constituée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_7(A)$.

3)Pour toutes M et N dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, pour tout réel λ, on a :
$f(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = A\lambda M + AN = \lambda AM + AN = \lambda f(M) + f(N)$.
Donc f est linéaire.
De plus, $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}), f(M) \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
Donc f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

4)a)Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
M \in \operatorname{Ker} f &\iff f(M) = 0 \\
&\iff AM = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+6z & 3y+6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{lcccc} x & + & 2z & = & 0 \\ y & + & 2t & = & 0 \\ 3x & + & 6z & = & 0 \\ 3y & + & 6t & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -2z \\ y & = & -2t \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } \operatorname{Ker} f &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid x = -2z, y = -2t \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -2z & -2t \\ z & t \end{pmatrix}, (z,t) \in \mathbf{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ z\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (z,t) \in \mathbf{R}^2 \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Ker} f$.

C'est aussi une famille libre car les deux matrices ne sont pas colinéaires.

Donc $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

Donc $\dim Kerf = 2$.

b)Le théorème du rang donne : $\dim \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) = \dim Kerf + \dim Imf$.

Donc $\dim Imf = \dim \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) - \dim Kerf = 4 - 2 = 2$.

Pour trouver une base de Imf, on peut remarquer par exemple que $f(E_1)$ et $f(E_2)$ sont des vecteurs de Imf. Calculons-les.

$f(E_1) = AE_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$f(E_2) = AE_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de Imf (car constituée de deux vecteurs non colinéaires) dont le cardinal vaut 2 et coïncide avec la dimension de Imf. C'est donc une base de Imf.

5)a)$f(E_1) = AE_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = E_1 + 3E_3$,

$f(E_2) = AE_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = E_2 + 3E_4$,

$f(E_3) = AE_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = 2E_1 + 6E_3$,

$f(E_4) = AE_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 2E_2 + 6E_4$.

On déduit :

$$B = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

b)$B - \lambda I = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 1-\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \\ L_4 \end{array}$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 7\lambda & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow (1-\lambda)L_1 - 3L_3 \\ L_4 \end{array}$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 7\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_4 \\ L_3 \\ L_4 \leftrightarrow L_2 \end{array}$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 7\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - 7\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow (1-\lambda)L_2 - 3L_4 \end{array}$

λ est VP de B

$\iff B - \lambda I$ n'est pas inversible

$\iff \lambda^2 - 7\lambda = 0$

$\iff \lambda = 0$ ou $\lambda = 7$

Ainsi, les valeurs propres de B sont 0 et 7.

Cherchons maintenant les sous-espaces propres de B.

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$U \in E_0(B) \iff BU = 0$

$$\iff \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + 2t = 0 \\ 3x + 6z = 0 \\ 3y + 6t = 0 \end{cases}$$

$\iff x = -2z$ et $y = -2t$.

Donc $E_0(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = -2z \text{ et } y = -2t \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ -2t \\ z \\ t \end{pmatrix}, (y,t) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

Donc $E_0(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On vérifie que $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_0(B)$. Donc $dim E_0(B) = 2$.

$U \in E_7(B) \iff (B - 7I)U = 0$

$$\iff \begin{cases} -6x + 2z = 0 \\ -6y + 2t = 0 \\ 3x - z = 0 \\ 3y - t = 0 \end{cases}$$

$\iff z = 3x$ et $t = 3y$.

Donc $E_7(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid z = 3x \text{ et } t = 3y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x \\ 3y \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

Donc $E_7(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

On vérifie que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_7(B)$. Donc $dim E_7(B) = 2$.

c)$dim E_0(B) + dim E_7(B) = 4$ et $B \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$.
Donc B est diagonalisable d'après le théorème de réduction.

Enfin, 0 étant valeur propre de B, cela entraîne que B n'est pas inversible.