DM16 - à rendre le lundi / /

Exercice

Sous diverses hypothèses, l'exercice étudie différentes situations probabilistes concernant une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre.
Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.

Partie I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+t)^3} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

1)Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire Z

2)Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z.

3)Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3}dt$, puis la calculer en effectuant le changement de variable $u = t + 1$.

4)Prouver que Z admet une espérance et la déterminer.

5)Z admet-elle une variance ?

6)On suppose que le temps de fabrication, exprimé en minutes, d'une pièce par la chaîne A (respectivement B) est une variable aléatoire Z_1 (respectivement Z_2) où Z_1 etZ_2 sont indépendantes et suivent la même loi que que Z.

a)On considère les événements :
C = « le temps de fabrication d'une pièce sur la chaine B est supérieur à 2 minutes ».
D = "le temps de fabrication d'une pièce sur la chaîne B est inférieur à 3 minutes".
Calculer les probabilités suivantes : $P(C)$, $P(D)$ et $P_C(D)$.

b)On note $T = \max(Z_1, Z_2)$ et G_T la fonction de répartition de T.

i)Exprimer l'événement $(T \leq x)$ en fonction des événements $(Z_1 \leq x)$ et $(Z_2 \leq x)$

ii)Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ G_T(x) = [F_Z(x)]^2$.

c)En déduire que T est à densité. Donner une densité de T.

Partie II

On suppose maintenant que pour qu'une pièce soit terminée, il faut qu'elle passe par la chaîne A puis par la chaîne B.
Le temps de passage exprimé en minutes pour un objet sur la chaîne A est une variable aléatoire M suivant une loi exponentielle de paramètre 2.
Le temps de passage exprimé en minutes pour un objet sur la chaîne B est une variable aléatoire N suivant une loi uniforme sur $[0,1]$
Les variables M et N sont indépendantes.

7)Rappeler l'expression d'une densité v de M et d'une densité w de N.

8)On note S la variable aléatoire représentant le temps de fabrication d'une pièce. Exprimer S en fonction de M et de N et déterminer le temps moyen de fabrication d'une pièce.