DM13 cubes - à rendre le lundi / /

Exercice :
Une urne contient r boules numérotées 1,2,...,r (avec $r \geq 2$).
On pioche indéfiniment les boules **avec remise**.
Pour tout entier $i \in [\![1,r]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au nombre de pioches nécessaires pour obtenir i boules distinctes. On convient que $Y_1 = 1$.
Exemple : pour $r = 4$, si les boules piochées portent les numéros 3,3,3,1,1,1,1,2,3,2,4,1,...
on a alors : $Y_1 = 1, Y_2 = 4, Y_3 = 8, Y_4 = 11$.

Partie I : résultats préliminaires
On étudie la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ U_n = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) - \ln(n)$.

1)A l'aide d'un développement limité, justifier que $U_n - U_{n+1} \sim \dfrac{1}{2n^2}$.

2)En déduire la convergence de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$.

Partie II : étude de Y_r
1)On suppose dans cette question que $r = 3$, c'est-à-dire que l'urne ne contient que 3 boules numérotées 1,2,3.

a)Pour tout entier $n \geq 1$, on note C_n = "les n premières pioches amènent des boules portant toutes le même numéro".
(i)Comparer les événements $(Y_2 > n)$ et C_n. En déduire la probabilité $P(Y_2 > n)$.
(ii)Donner la loi de Y_2.

b)Justifier que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ P(Y_3 - Y_2 = n) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(Y_3 = n + k \cap Y_2 = k)$, puis que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall k \geq 2,\ P(Y_3 = n + k \cap Y_2 = k) = \dfrac{1}{3^{k-1}}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

En déduire la loi de $Y_3 - Y_2$.

Dans toute la suite de l'exercice, on revient au cas général en prenant $r \geq 2$.

2)a)Justifier que $Y_i(\Omega) = [\![i, +\infty[\![$ et que $(Y_{i+1} - Y_i)(\Omega) = \mathbf{N}^*$.

b)Démontrer que $\forall n \geq 1, \forall k \geq i,\ P_{(Y_i=k)}(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\dfrac{i}{r}\right)^{n-1}\left(1 - \dfrac{i}{r}\right)$.

c)En déduire que $Y_{i+1} - Y_i$ suit une loi usuelle dont on précisera le ou les paramètres, puis établir que :
$E(Y_{i+1} - Y_i) = \dfrac{r}{r-i}$ et que $V(Y_{i+1} - Y_i) = \dfrac{ri}{(r-i)^2}$.

3)a)(i)Justifier que $Y_r = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{r-1} (Y_{r-i+1} - Y_{r-i})$.

(ii)En admettant que $Y_2 - Y_1, Y_3 - Y_2, ..., Y_r - Y_{r-1}$ sont mutuellement indépendantes, vérifier que :

$E(Y_r) = r\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i}$ et $V(Y_r) = r^2\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2} - r\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i}$.

b)A l'aide de la partie I, prouver l'existence de deux réels α et β tels que :
$E(Y_r) \underset{+\infty}{=} r \ln r + \alpha r + o(r)$ et $V(Y_r) \underset{+\infty}{\sim} \beta r^2$.