Problème (essec II 2016)

Partie I

1)a)Soit $j \in \mathbf{N}^*$.
Comme X prend des valeurs entières, on a : $X > j-1 \Longleftrightarrow X > j$ ou $X = j$.

L'événement $(X > j-1)$ est donc la réunion des événements incompatibles $(X > j)$ et $(X = j)$.

On déduit : $P(X > j-1) = P(X > j) + P(X = j)$.

D'où $P(X = j) = P(X > j-1) - P(X > j)$.

b)Soit $p \in \mathbf{N}^*$.
En multipliant l'égalité précédente par j et en sommant pour $j \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p} jP(X=j) &= \sum_{j=1}^{p} \big(jP(X > j-1) - jP(X > j)\big)\\ &= \sum_{j=1}^{p} \big(P(X > j-1) + (j-1)P(X > j-1) - jP(X > j)\big)\\ &= \sum_{j=1}^{p} P(X > j-1) + \sum_{j=1}^{p} \big(\underbrace{(j-1)P(X > j-1)}_{u_{j-1}} - \underbrace{jP(X > j)}_{u_j}\big).\end{aligned}$$

En posant $k = j-1$, on a : $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} P(X > j-1) = \sum_{k=0}^{p-1} P(X > k)$.

Par télescopage, $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \big((j-1)P(X > j-1) - jP(X > j)\big) = u_0 - u_p = -pP(X > p)$.

En remplaçant plus haut, on déduit :

$$\sum_{j=1}^{p} jP(X=j) = \sum_{j=0}^{p-1} P(X > j) - pP(X > p).$$

2)a)i.Comme X admet une espérance, la série de terme général $kP(X = k)$ est absolument convergente donc convergente.

a)ii.La relation de Chasles donne :

$$\sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) - \sum_{k=1}^{p} kP(X=k) \quad (*)$$

La série de terme général $kP(X = k)$ converge donc sa somme partielle converge vers la somme de cette série, ce qui se traduit par :

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k).$$

En passant à la limite dans $(*)$ quand $p \to +\infty$, on a : $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X=k) = 0$.

a)iii.$\forall k \geq p+1,\ kP(X=k) \geq pP(X=k)$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X=k) \geq \sum_{k=p+1}^{+\infty} pP(X=k)$

Or, $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{+\infty} pP(X=k) = p\sum_{k=p+1}^{+\infty} P(X=k) = pP\left(\bigcup_{k=p+1}^{+\infty}(X=k)\right) = pP(X>p)$.

On déduit : $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X=k) \geq pP(X>p) \geq 0$.

On a vu que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X=k) = 0$.

D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} pP(X>p) = 0$.

a)iv.D'après la question 1)b), on a :

$$\sum_{j=0}^{p-1} P(X>j) = \sum_{j=1}^{p} jP(X=j) + pP(X>p).$$

$\displaystyle\lim_{p\to+\infty} pP(X>p) = 0$ et $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\sum_{j=1}^{p} jP(X=j) = \sum_{j=1}^{+\infty} jP(X=j) = E(X)$.

Par somme, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\sum_{j=0}^{p-1} P(X>j) = E(X) = \mu$.

C'est une valeur finie donc la série de terme général $P(X>j)$ converge.

a)v.La somme partielle d'ordre $p-1$ de la série de terme général $P(X>j)$ tend vers μ quand $p\to+\infty$.

Ainsi, $\displaystyle\mu = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X>j)$.

b)i.$\forall p \in \mathbf{N}^*,\ \displaystyle v_{p+1} - v_p = \sum_{j=0}^{p} P(X>j) - \sum_{j=0}^{p-1} P(X>j) = P(X>p) \geq 0$.

Donc la suite $(v_p)_{p\geq 1}$ est croissante.

b)ii.D'après la question 1)b), on a pour tout $p\in\mathbf{N}^*$:

$$\sum_{j=1}^{p} jP(X=j) = v_p - \underbrace{pP(X>p)}_{\geq 0} \leq v_p \quad (1)$$

Par hypothèse, la série $\displaystyle\sum_{j\geq 0} P(X>j)$ converge.

La somme partielle v_p de cette série tend donc vers $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} P(X>j)$.

Cette suite $(v_p)_{p\geq 1}$ étant croissante, on a : $\displaystyle v_p \leq \sum_{j=0}^{+\infty} P(X>j) \quad (2)$

En recollant (1) et (2), on déduit : $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} jP(X=j) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} P(X>j)$.

b)iii.La pour somme partielle S_p d'ordre p de la série $\displaystyle\sum_{j\geq 1} |jP(X=j)|$ est :

$$S_p = \sum_{j=1}^{p} |jP(X=j)| = \sum_{j=1}^{p} jP(X=j) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} P(X>j).$$

$(S_p)_{p\geq 1}$ est croissante car $S_{p+1} - S_p = (p+1)P(X=p+1) \geq 0$,

et majorée par $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} P(X>j)$. Elle est donc convergente.

Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{j\geq 1} jP(X=j)$ converge absolument. Donc X admet une espérance.

c)La question 2)a) montre que si X admet une espérance, alors la série $\displaystyle\sum_{j\geq 0} P(X>j)$ converge.

Réciproquement, la question 2)b) montre que si la série $\displaystyle\sum_{j\geq 0} P(X>j)$ converge, alors X admet une espérance.
D'où l'équivalence.

3)a)D'après la question 1)a), on a pour tout $j \in \mathbf{N}^*$:
$P(X=j) = P(X>j-1) - P(X>j) = \dfrac{1}{j^\alpha} - \dfrac{1}{(j+1)^\alpha} \geq 0.$

$$\begin{aligned}\text{De plus, } \sum_{j=1}^{+\infty} P(X=j) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Donc $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}^*$.

b)D'après 2)c), $E(X)$ existe si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{j\geq 0} P(X>j)$ converge.

Or, $j+1 \underset{+\infty}{\sim} j$ donc $(j+1)^\alpha \underset{+\infty}{\sim} j^\alpha$. Par inverse, $P(X>j) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{j^\alpha}$.

Les séries $\displaystyle\sum_{j\geq 0} P(X>j)$ et $\displaystyle\sum_{j\geq 1} \frac{1}{j^\alpha}$ ont donc même nature.

Or, $\displaystyle\sum_{j\geq 1} \frac{1}{j^\alpha}$ est une série de Riemann de paramètre α, convergeant ssi $\alpha > 1$.

Donc X admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$.

c)Pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$P(X=j) = \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{j^\alpha}{(j+1)^\alpha}\right) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{\frac{(j+1)^\alpha}{j^\alpha}}\right).$$

D'où, $\forall j \in \mathbf{N}^*,\ P(X=j) = \dfrac{1}{j^\alpha}\left(1 - \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha}\right)$.

d)i.$\forall x \in [0,1],\ f'(x) = \alpha(1+x)^{-\alpha-1} - \alpha = \underbrace{\alpha}_{>0}\left(\dfrac{1}{(1+x)^{\alpha+1}} - 1\right)$.

$1+x \geq 1$ donc $(1+x)^{\alpha+1} \geq 1$, puis $\dfrac{1}{(1+x)^{\alpha+1}} \leq 1$.

Donc $\forall x \in [0,1],\ f'(x) \leq 0$, ce qui prouve que f est décroissante sur $[0,1]$.

d)ii.f est décroissante sur $[0,1]$ et vérifie $f(0)=0$ donc $\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq 0$.
On a donc $\forall x \in [0,1],\ 1-(1+x)^{-\alpha} \leq \alpha x$.
En remplaçant x par $\frac{1}{j} \in [0,1]$ où $j \in \mathbf{N}^*$, on obtient :
$1 - \left(1+\frac{1}{j}\right)^{-\alpha} \leq \dfrac{\alpha}{j}$, c'est-à-dire : $1 - \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha} \leq \dfrac{\alpha}{j}$.

En multipliant membre à membre par $\frac{1}{j^\alpha}$ et en utilisant 3)c), on déduit :
$\forall j \in \mathbf{N}^*,\ P(X=j) \leq \dfrac{\alpha}{j^{1+\alpha}}$.

e)La question 3)c) donne en multipliant membre à membre par $j^{\alpha+1}$:

$$j^{\alpha+1}P(X=j) = j\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha}\right) = -j\left(\left(1+\tfrac{1}{j}\right)^{-\alpha} - 1\right).$$

D'après le cours, on a : $(1+x)^{-\alpha} - 1 \underset{0}{\sim} -\alpha x$.

Comme $\lim\limits_{j\to+\infty} \dfrac{1}{j} = 0$, on peut remplacer x par $\dfrac{1}{j}$, ce qui donne :
$\left(1+\dfrac{1}{j}\right)^{-\alpha} - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\alpha \times \dfrac{1}{j}$. Puis, en multipliant par $-j$, on a :
$-j\left(\left(1+\frac{1}{j}\right)^{-\alpha} - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} -\alpha$. Donc $\lim\limits_{j\to+\infty} j^{\alpha+1}P(X=j) = \alpha$.

f)La question 3)e) donne : $P(X=j) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{j^{\alpha+1}}$, puis $j^2P(X=j) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{j^{\alpha-1}}$.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} X \text{ admet une variance } &\iff X^2 \text{ admet une espérance} \quad \text{(Koenig)} \\ &\iff \sum_{j\geq 1} j^2 P(X=j) \text{ converge} \\ &\iff \sum_{j\geq 1} \frac{\alpha}{j^{\alpha-1}} \text{ converge} \quad \text{(critère d'équivalence)} \\ &\iff \alpha - 1 > 1 \quad \text{(série de Riemann)} \\ &\iff \alpha > 2. \end{aligned}$$

Partie II

4)**Remarque importante**

L'égalité $A_n = \bigcup\limits_{k\geq 1} (T_k = n)$ ne figurait pas dans le sujet, je l'ai rajoutée pour aider à la compréhension.

On peut remarquer que comme $\forall i \in [\![1,k]\!],\ X_i \geq 1$, on a $T_k \geq k$, ce qui impose que dans la dans la réunion définissant A_n, l'entier k ne peut pas dépasser n.

On a donc $A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} (T_k = n) \quad (**)$

a)Les événements A_1 et $(X_1 = 1)$ sont égaux, ce qu'on peut voir de 2 façons :

<u>intuitive</u>

$A_1 =$ « le composant en place le jour 1 tombe en panne ».

$(X_1 = 1) =$ « le premier composant a une durée de vie de 1 jour ».

Les événements A_1 et $(X_1 = 1)$ sont égaux, puisque le premier composant est forcément le composant en place le jour 1.

<u>mathématique</u>

Grâce à $(**)$, on a : $A_1 = \bigcup\limits_{k=1}^{1} (T_k = 1) = (T_1 = 1) = (X_1 = 1)$.

On déduit : $P(A_1) = P(X_1 = 1)$, c'est-à-dire : $u_1 = p_1$.

b)i. De nouveau, on peut résoudre cette question de deux façons :

<u>intuitive</u>

L'événement $(X_1 = 2) \cup \big((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)\big)$ est réalisé si et seulement si :

− le premier composant vit 2 jours,

ou bien

− les premier et deuxième composants vivent 1 jour chacun.

Ces 2 possibilités sont les seules qui mènent à une panne de composant le 2ème jour, c'est-à-dire à la réalisation de A_2.

Ainsi, $A_2 = (X_1 = 2) \cup \big((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)\big)$.

<u>mathématique</u>

Grâce à $(**)$, on a :

$A_2 = \bigcup\limits_{k=1}^{2} (T_k = 2) = (T_1 = 2) \cup (T_2 = 2) = (X_1 = 2) \cup (X_1 + X_2 = 2)$

$= (X_1 = 2) \cup \big((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)\big)$ car X_1 et X_2 prennent leurs valeurs dans $\mathbf{N}^*$.

b)ii. Les événements $(X_1 = 2)$ et $\big((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)\big)$ sont incompatibles.

Donc $P(A_2) = P(X_1 = 2) + P\big((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)\big)$

$\quad = P(X_1 = 2) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$ par indépendance de X_1 et X_2

$\quad = P(X_1 = 2) + P(X_1 = 1)^2$ car X_1 et X_2 ont même loi

Compte tenu des notations, on a finalement :

$$u_2 = p_2 + p_1^2.$$

c)i.• Comme $\forall i \in \mathbf{N}^*, \tilde{X}_i = X_{i+1}$, la famille $\left(\tilde{X}_i\right)_{i\in\mathbf{N}^*}$ est la famille $(X_i)_{i\geq 2}$ dont les variables aléatoires sont mutuellement indépendantes par hypothèse.
Ainsi, les variables aléatoires $\tilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes.
• Soit $i \in \mathbf{N}^*$. Les variables aléatoires $(X_k)_{k\geq 1}$ sont mutuellement indépendantes.
$i+1 \geq 2$ donc $X_{i+1} = \tilde{X}_i$ et X_1 sont indépendantes.
De plus, $X_{i+1} = \tilde{X}_i$ et X_1 ont même loi par hypothèse.
c)ii.Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

$$\begin{aligned}
A_n \cap (X_1 = k) &= \left(\bigcup_{j\geq 1}(T_j = n)\right) \cap (X_1 = k) \\
&= \big(\underbrace{(T_1 = n) \cap (X_1 = k)}_{=\emptyset \text{ car } T_1 = X_1 \text{ et } k<n}\big) \cup \left(\bigcup_{j\geq 2}(T_j = n)\right) \cap (X_1 = k) \\
&= \bigcup_{j\geq 2}\big((T_j = n) \cap (X_1 = k)\big) \quad \text{par distributivité} \\
&= \bigcup_{j\geq 2}\big((X_1 + X_2 + \cdots + X_j = n) \cap (X_1 = k)\big) \\
&= \bigcup_{j\geq 2}\big((k + X_2 + \cdots + X_j = n) \cap (X_1 = k)\big) \\
&= \bigcup_{j\geq 2}\big((X_2 + \cdots + X_j = n-k) \cap (X_1 = k)\big) \\
&= \bigcup_{j\geq 2}\big((\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_{j-1} = n-k) \cap (X_1 = k)\big) \\
&= \bigcup_{i\geq 1}\big((\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_i = n-k) \cap (X_1 = k)\big) \quad \text{en posant } i = j-1 \\
&= \bigcup_{j\geq 1}\big((\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_j = n-k) \cap (X_1 = k)\big) \quad \text{en renommant } i \text{ en } j \\
&= (X_1 = k) \cap \bigcup_{j\geq 1}(\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_j = n-k).
\end{aligned}$$

c)iii.Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

$$\begin{aligned}
&P\big((X_1 = k) \cap A_n\big) \\
&= P\left((X_1 = k) \cap \bigcup_{j\geq 1}\big(\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_j = n-k\big)\right) \quad \text{d'après 4)c)ii.} \\
&= P\left(\bigcup_{j\geq 1}\Big((X_1 = k) \cap \big(\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_j = n-k\big)\Big)\right) \quad \text{par distributivité} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} P\Big((X_1 = k) \cap \big(\tilde{X}_1 + \cdots + \tilde{X}_j = n-k\big)\Big) \quad \text{par incompatibilité} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} P\big((X_1 = k) \cap \big(X_2 + \cdots + X_{j+1} = n-k\big)\big).
\end{aligned}$$

Comme X_1, X_2, ..., X_{j+1} sont mutuellement indépendantes, X_1 est indépendante de toute fonction de X_2, ..., X_{j+1} donc indépendante avec $X_2 + \cdots + X_{j+1}$, grâce au lemme des coalitions. On poursuit le calcul ...

$= \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} P(X_1 = k)P\big(X_2 + \cdots + X_{j+1} = n - k\big)$

$= P(X_1 = k)\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} P\big(X_2 + \cdots + X_{j+1} = n - k\big).$

Les variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_{j+1} sont mutuellement indépendantes et de même loi donc $X_2 + \cdots + X_{j+1}$ a même loi que $X_1 + \cdots + X_j = T_j$ **(1)**

$= P(X_1 = k)\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} P\big(T_j = n - k\big).$

$= P(X_1 = k)P\left(\displaystyle\bigcup_{j\geq 1}\big(T_j = n - k\big)\right)$ par incompatibilité

$= P(X_1 = k)P\left(A_{n-k}\right).$

On vient de prouver que $P\big((X_1 = k) \cap A_n\big) = P(X_1 = k)P\left(A_{n-k}\right)$, ce qui établit :

$$P_{(X_1=k)}(A_n) = P\left(A_{n-k}\right).$$

Remarques

1)Intuitivement, ce résultat bien ardu à prouver mathématiquement est évident. En effet, si l'événement $(X_1 = k)$ se réalise, cela signifie que le premier composant tombe en panne le jour k. Pour réaliser A_n, il faut une panne de composant au jour n. En réinitialisant les jours, on est dans la situation où il reste $n - k$ jours où l'on veut une panne au jour $n - k$ donc une réalisation de A_{n-k}.

2)Un mot de l'égalité (**1**) qui me paraît hors programme ! Expliquons pour $j = 2$. Soient X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires mutuellement indép. et de même loi.

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = s) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\big((X_1 = k) \cap (X_2 = s - k)\big) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)P(X_2 = s - k) \quad \text{par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_3 = k)P(X_2 = s - k) \quad \text{car } X_1 \text{ et } X_3 \text{ ont même loi} \\ &= P(X_2 + X_3 = s). \end{aligned}$$

Donc $X_1 + X_2$ et $X_2 + X_3$ ont même loi.

d)La formule des probabilités totales pour le sce $\big((X_1 = k)\big)_{k\geq 1}$ donne :

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P_{(X_1=k)}(A_n)P(X_1 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(A_{n-k}\right)P(X_1 = k) \quad \text{d'après 4)c)iii.} \end{aligned}$$

Dans la somme, on doit avoir $n-k \geq 0$, c'est-à-dire $k \leq n$.

Donc $P(A_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P\left(A_{n-k}\right) P(X_1 = k) = \sum_{k=1}^{n} u_{n-k} p_k$.

Ainsi, $u_n = u_{n-1}p_1 + \cdots + u_0 p_n$.

e)Programme

```
def suite(n,P):
    U=[1]
    for j in range(1,n+1):
        s=0
        for k in range(1,j+1):
            s=s+U[j-k]*P[k-1]
        U.append(s)
    return U[n]
```

5)a)Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X_1 > k) &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} P(X_1 = j) \\
&= \sum_{j=k+1}^{+\infty} \lambda(1-\lambda)^{j-1} \\
&= \lambda \sum_{i=0}^{+\infty} (1-\lambda)^{i+k} \quad \text{en posant } i = j-k-1 \text{ ou } j = i+k+1 \\
&= \lambda \sum_{i=0}^{+\infty} (1-\lambda)^{i} (1-\lambda)^{k} \\
&= \lambda(1-\lambda)^k \sum_{i=0}^{+\infty} (1-\lambda)^{i} \\
&= \lambda(1-\lambda)^k \times \frac{1}{1-(1-\lambda)} \\
&= (1-\lambda)^k.
\end{aligned}$$

b)Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
P_{(X_1 > k)}(X_1 = k+1) &= \frac{P\big((X_1 > k) \cap (X_1 = k+1)\big)}{P(X_1 > k)} \\
&= \frac{P(X_1 = k+1)}{P(X_1 > k)} \quad \text{car } (X_1 = k+1) \subset (X_1 > k) \\
&= \frac{\lambda(1-\lambda)^k}{(1-\lambda)^k} \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

c)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_n = \lambda$ ».

Montrons par récurrence forte que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

$\mathscr{P}(1)$ s'écrit : « $u_1 = \lambda$ ». C'est vrai car $u_1 = p_1 = P(X_1 = 1) = \lambda(1-\lambda)^{1-1} = \lambda$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(1)$, ..., $\mathscr{P}(n)$ vraies. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} u_{n+1-k}\ p_k \quad \text{en utilisant 4)d) avec } n \to n+1 \\
&= u_0\ p_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} u_{n+1-k}\ p_k \quad \text{en isolant le dernier terme} \\
&= 1 \times \lambda(1-\lambda)^n + \sum_{k=1}^{n} \lambda \times \lambda(1-\lambda)^{k-1} \\
&= \lambda(1-\lambda)^n + \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} (1-\lambda)^{k-1} \\
&= \lambda(1-\lambda)^n + \lambda^2 \sum_{i=0}^{n-1} (1-\lambda)^{i} \quad \text{en posant } i = k-1 \\
&= \lambda(1-\lambda)^n + \lambda^2 \times \frac{1-(1-\lambda)^n}{1-(1-\lambda)} \\
&= \lambda(1-\lambda)^n + \lambda\big(1-(1-\lambda)^n\big) \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ P(A_n) = \lambda$.

6)a)$(X_1 = i)_{i \geq 1}$ est un sce donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i) = 1$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$.

Comme $p_1 + p_2 = 1$, cela entraîne que $\displaystyle\sum_{i=3}^{+\infty} p_i = 0$.

Enfin, comme $p_i \geq 0$, on a finalement $\forall i \geq 3,\ p_i = 0$.

b)Comme $\forall i \geq 3,\ p_i = 0$, l'égalité 4)d) donne pour tout entier $n \geq 2$:

$u_n = u_{n-1}p_1 + u_{n-2}p_2 = pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2}$.

On a alors : $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2} \\ u_{n-1} + 0u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$.

Donc $\forall n \geq 2$, $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$.

c)i.λ est valeur propre de M

$\iff M - \lambda I$ n'est pas inversible

$\iff det \begin{pmatrix} p-\lambda & 1-p \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$

$\iff (p-\lambda) \times (-\lambda) - (1-p) \times 1 = 0$

$\iff \lambda^2 - p\lambda + p - 1 = 0 \quad (E)$

$\lambda_1 = 1$ est solution de (E). L'autre solution λ_2 est donnée par $\lambda_1\lambda_2 = p-1$.
Donc $\lambda_2 = p - 1$.

M possède deux valeurs propres distinctes : 1 et $p - 1 < 0$.
Elle est donc diagonalisable.

Il reste à déterminer les sous-espaces propres de M. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$U \in E_1(M) \Longleftrightarrow (M-I)U = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (p-1)x + (1-p)y = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow y = x$

(en divisant la première équation par $p - 1 \neq 0$).

On déduit $E_1(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$U \in E_{p-1}(M) \Longleftrightarrow (M-(p-1)I)U = 0 \Longleftrightarrow x + (1-p)y = 0 \Longleftrightarrow x = (p-1)y$

On déduit $E_{1-p}(M) = \text{Vect} \begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a alors : $M = PDP^{-1}$.

c)ii.Une récurrence classique donne : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ M^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$

avec $D^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{detP} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On remplace et on obtient :

$$\begin{aligned}
M^{n-1} &= \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & (p-1)^n \\ 1 & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1-(p-1)^n & 1-p+(p-1)^n \\ 1-(p-1)^{n-1} & 1-p+(p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2-p} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(p-1)^n & (p-1)^n \\ -(p-1)^{n-1} & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2-p} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + (p-1)^{n-1} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Remarque

Une récurrence était possible.

d)i.Une récurrence facile donne : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\text{Or, } M^{n-1} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2-p} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} + (p-1)^{n-1} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2-p} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (p-1)^{n-1} \begin{pmatrix} -(p-1)^2 \\ 1-p \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1-(p-1)^{n+1} \\ 1-(p-1)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On déduit : $u_n = \dfrac{1-(p-1)^{n+1}}{2-p}$.

d)ii.Comme $0 < p < 1$, on a : $-1 < p-1 < 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (p-1)^{n+1} = 0$,

puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{2-p}$.

Partie III

7)$E(T_k) = E(X_1 + \cdots + X_k)$
$= E(X_1) + \cdots + E(X_k)$ par linéarité
$= \mu + \cdots + \mu$ car les X_i ont la même loi
$= k\mu$.

8)a)$V(T_k) = V(X_1 + \cdots + X_k)$
$= V(X_1) + \cdots + V(X_k)$ par indépendance des X_i
$= \sigma^2 + \cdots + \sigma^2$ car les X_i ont la même loi
$= k\sigma^2$.

b)Bienaymé-Tchébychev pour une v.a X possédant une variance s'écrit :
$\forall \epsilon > 0,\ P\big(|X - E(X)| \geq \epsilon\big) \leq \dfrac{V(X)}{\epsilon^2}$.
On l'applique avec $X \to T_k$ et $\epsilon \to k\epsilon$, ce qui donne pour tout $\epsilon > 0$:
$P\big(|T_k - E(T_k)| \geq\ k\epsilon\big) \leq \dfrac{V(T_k)}{(k\epsilon)^2}$ avec $E(T_k) = k\mu$ et $V(T_k) = k\sigma^2$.

Donc $\forall \epsilon > 0,\ P\big(|T_k - k\mu| \geq\ k\epsilon\big) \leq \dfrac{\sigma^2}{k\epsilon^2}$.

c)De l'inégalité précédente, on déduit pour tout $\epsilon > 0$:
$-P\big(|T_k - k\mu| \geq\ k\epsilon\big) \geq -\dfrac{\sigma^2}{k\epsilon^2}$, puis $1 - P\big(|T_k - k\mu| \geq\ k\epsilon\big) \geq 1 - \dfrac{\sigma^2}{k\epsilon^2}$.
En passant à l'événement contraire, on obtient :
$P\big(|T_k - k\mu| < k\epsilon\big) \geq 1 - \dfrac{\sigma^2}{k\epsilon^2}$.

Or, $|T_k - k\mu| < k\epsilon \iff -k\epsilon < T_k - k\mu < k\epsilon \iff -\epsilon < \dfrac{T_k}{k} - \mu < \epsilon$

$\iff \mu - \epsilon < \dfrac{T_k}{k} < \mu + \epsilon \iff \dfrac{T_k}{k} \in]\mu - \epsilon, \mu + \epsilon[$.
On déduit : $P\left(\dfrac{T_k}{k} \in]\mu - \epsilon, \mu + \epsilon[\right) \geq 1 - \dfrac{\sigma^2}{k\epsilon^2}$.
Et comme une probabilité est toujours inférieure ou égale à 1, on a finalement :
$1 - \dfrac{\sigma^2}{k\epsilon^2} \leq P\left(\dfrac{T_k}{k} \in]\mu - \epsilon, \mu + \epsilon[\right) < k\epsilon\big) \leq 1$.
Enfin, $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(1 - \dfrac{\sigma^2}{k\epsilon^2}\right) = 1$.

D'après la propriété des gendarmes, $\lim\limits_{k\to+\infty} P\left(\dfrac{T_k}{k} \in]\mu - \epsilon, \mu + \epsilon[\right) = 1$.

9)a)Soit $\omega \in \Omega$. Distinguons deux cas :
$-$ si $X_i(\omega) \leq m$, alors on a : $Y_i^{(m)}(\omega) = X_i(\omega)$ et $Z_i^{(m)}(\omega) = 0$.
Donc $Y_i^{(m)}(\omega) + Z_i^{(m)}(\omega) = X_i(\omega) + 0 = X_i(\omega)$.
$-$ si $X_i(\omega) > m$, alors on a : $Y_i^{(m)}(\omega) = 0$ et $Z_i^{(m)}(\omega) = X_i(\omega)$.
Donc $Y_i^{(m)}(\omega) + Z_i^{(m)}(\omega) = 0 + X_i(\omega) = X_i(\omega)$.
Ainsi, $\forall \omega \in \Omega,\ X_i(\omega) = Y_i^{(m)}(\omega) + Z_i^{(m)}(\omega)$. Donc $X_i = Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)}$.

b)i.A priori, la question n'impose pas de prouve que $Z_1^{(m)}$ admet une espérance. On va le faire quand même en montrant la convergence absolue de la série de terme général $iP\left(Z_1^{(m)}=i\right)$. Ce terme général étant positif, cela revient à montrer la convergence simple.

Les probabilités totales pour le sce $\big((X_1>m),(X_1\leq m)\big)$ donne pour $i\in\mathbf{N}^*$:

$P\left(Z_1^{(m)}=i\right)$

$= P_{(X_1>m)}(Z_1^{(m)}=i)P(X_1>m)+\underbrace{P_{(X_1\leq m)}(Z_1^{(m)}=i)}_{0 \text{ car si } X_1\leq m,\text{ alors } Z_1^{(m)}=0}P(X_1\leq m)$

$= P_{(X_1>m)}(X_1=i)P(X_1>m)$ car si $X_1>m$, alors $Z_1^{(m)}=X_1$.

$= P\big((X_1>m)\cap(X_1=i)\big)$

$= \begin{cases} 0 & \text{si } i\leq m \\ P(X_1=i) & \text{si } i\geq m+1 \end{cases}$

Comme X_1 admet une espérance, alors la série $\displaystyle\sum_{i\geq m+1} iP(X_1=i)$ converge.

Donc la série $\displaystyle\sum_{i\geq 1} iP\left(Z_1^{(m)}=i\right)$ converge. $Z_1^{(m)}$ admet une espérance donnée par :

$E\left(Z_1^{(m)}\right)=\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} iP\left(Z_1^{(m)}=i\right)=\sum_{i=m+1}^{+\infty} iP(X_1=i).$

D'aprsè la question 3)d)ii, on a : $P(X_1=i)\leq\dfrac{\alpha}{i^{1+\alpha}}$, puis $iP(X_1=i)\leq\dfrac{\alpha}{i^{\alpha}}$.

La série de terme général $\dfrac{\alpha}{i^{\alpha}}$ est convergente en tant que série de Riemann de paramètre $\alpha>1$.

On peut donc sommer les inégalités pour i allant de $m+1$ à $+\infty$ et conclure :

$$E\left(Z_1^{(m)}\right)\leq\sum_{i=m+1}^{+\infty}\frac{\alpha}{i^{\alpha}}.$$

b)ii.Soit i un entier supérieur ou égal à $m+1$.

Pour tout $x\in[i-1,i]$, on a : $x^{\alpha}\leq i^{\alpha}$, puis $\dfrac{1}{i^{\alpha}}\leq\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ et $\dfrac{\alpha}{i^{\alpha}}\leq\dfrac{\alpha}{x^{\alpha}}$.

En intégrant entre les bornes croissantes $i-1$ et i, on a :

$\displaystyle\int_{i-1}^{i}\frac{\alpha}{i^{\alpha}}dx\leq\int_{i-1}^{i}\frac{\alpha}{x^{\alpha}}dx.$

Comme $\dfrac{\alpha}{i^{\alpha}}$ ne dépend pas de x, on a : $\displaystyle\int_{i-1}^{i}\frac{\alpha}{i^{\alpha}}dx=\frac{\alpha}{i^{\alpha}}\big(i-(i-1)\big)=\frac{\alpha}{i^{\alpha}}.$

Donc $\forall i\geq m+1,\ \dfrac{\alpha}{i^{\alpha}}\leq\displaystyle\int_{i-1}^{i}\frac{\alpha}{x^{\alpha}}dx.$

En sommant ces inégalités pour $i\in[\![m+1,n]\!]$ (avec $n\geq m+1$), on a :

$\displaystyle\sum_{i=m+1}^{n}\frac{\alpha}{i^{\alpha}}\leq\sum_{i=m+1}^{n}\int_{i-1}^{i}\frac{\alpha}{x^{\alpha}}dx.$

Donc $\displaystyle\sum_{i=m+1}^{n}\frac{\alpha}{i^\alpha}\leq\int_m^{n+1}\frac{\alpha}{x^\alpha}dx \quad (2) \quad$ par la relation de Chasles.

La série de Riemann $\displaystyle\sum_{i\geq m+1}\frac{\alpha}{i^\alpha}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_m^{+\infty}\frac{\alpha}{x^\alpha}dx$ convergent car $\alpha>1$.

Par passage à la limite dans (2), on a : $\displaystyle\sum_{i=m+1}^{+\infty}\frac{\alpha}{i^\alpha}\leq\int_m^{+\infty}\frac{\alpha}{x^\alpha}dx$.

En recollant avec l'inégalité de la question 9)b)i. on conclut :

$$E\left(Z_1^{(m)}\right)\leq\int_m^{+\infty}\frac{\alpha}{x^\alpha}dx.$$

b)iii.Pour tout $A>m$, on a :

$\displaystyle\int_m^A\frac{\alpha}{x^\alpha}dx=\int_m^A\alpha x^{-\alpha}dx=\left[\alpha\times\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_m^A=\frac{\alpha}{-\alpha+1}\left(\frac{1}{A^{\alpha-1}}-\frac{1}{m^{\alpha-1}}\right).$

$\alpha-1>0$ car $\alpha>1$. Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{A^{\alpha-1}}=0.$

On déduit : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_m^A\frac{\alpha}{x^\alpha}dx=\frac{\alpha}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}}.$

Ainsi, $\displaystyle\int_m^{+\infty}\frac{\alpha}{x^\alpha}dx=\frac{\alpha}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}}.$

b)iv.La variable aléatoire $Z_1^{(m)}$ est positive donc son espérance est positive.

Des questions b)ii. et b)iii., on déduit alors :

$\displaystyle\forall m\in\mathbf{N}^*,\ 0\leq E\left(Z_1^{(m)}\right)\leq\frac{\alpha}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}}.$

$\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\frac{\alpha}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}}=0.$

La propriété des gendarmes donne : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}E\left(Z_1^{(m)}\right)=0.$

b)v.La question 9)a) donne : $Y_i^{(m)}=X_i-Z_i^{(m)}$.

Comme X_i et $Z_i^{(m)}$ admettent une espérance, alors $Y_i^{(m)}$ admet une espérance donnée par linéarité :

$E\big(Y_i^{(m)}\big)=E(X_i)-E\big(Z_i^{(m)}\big)=\mu-E\big(Z_i^{(m)}\big).$

Or, $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}E\left(Z_1^{(m)}\right)=0$ donc $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}E\left(Y_1^{(m)}\right)=\mu.$

c)i.Soit $\omega\in\Omega$. Distinguons deux cas.

– si $X_1(\omega)\leq m$, alors $Y_1^{(m)}(\omega)=X_i(\omega)$.

On a alors : $\left(Y_1^{(m)}(\omega)\right)^2=X_1(\omega)^2=X_1(\omega)\times X_1(\omega)\leq mX_1(\omega).$

– si $X_1(\omega)>m$, alors $Y_1^{(m)}(\omega)=0$.

On a alors : $\left(Y_1^{(m)}(\omega)\right)^2=0\leq mX_1(\omega).$

Ainsi, $\forall\omega\in\Omega,\ \left(Y_1^{(m)}(\omega)\right)^2\leq mX_1(\omega)$. Donc $\left(Y_1^{(m)}\right)^2\leq mX_1$.

c)ii.$Y_1^{(m)}$ est discrète finie puisque $Y_1^{(m)}(\Omega) \subset [\![1, m]\!]$. Elle admet donc une variance et un moment d'ordre 2.

Par croissance de l'espérance, on déduit de la question 9)c)i. :

$E\left(\left(Y_1^{(m)}\right)^2\right) \leq E(mX_1) = mE(X_1) = m\mu \quad (3)$

Enfin, la formule de Koenig donne :

$V\left(Y_1^{(m)}\right) = \left(E\left(Y_1^{(m)}\right)^2\right) - E\left(\left(Y_1^{(m)}\right)\right)^2 \leq E\left(\left(Y_1^{(m)}\right)^2\right) \quad (4)$

En recollant (3) et (4), on conclut : $V\left(Y_1^{(m)}\right) \leq m\mu$.

d) $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} = 0$.

D'après la définition de la limite :

$\forall \epsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbf{N}^*, \forall m \geq m_0,\ \dfrac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \leq \epsilon$.

e)Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a :

$T_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \left(Y_1^{(m)} + Z_1^{(m)}\right) = \sum\limits_{i=1}^{k} Y_1^{(m)} + \sum\limits_{i=1}^{k} Z_1^{(m)} = U_k^{(m)} + V_k^{(m)}$.

f)i.Par linéarité, on a : $E(V_k^{(m)}) = \sum\limits_{i=1}^{k} E(Z_i^{(m)})$.

Les calculs faits dans la question 9)b)iv. donnent : $E(Z_1^{(m)}) \leq \dfrac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}$,
mais également $\forall i \in [\![1, k]\!],\ E(Z_i^{(m)}) \leq \dfrac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \quad (5)$

En effet, les variables aléatoires $Z_i^{(m)}$ ont la même loi que $Z_1(m)$, puisque les variables aléatoires X_i ont même loi que X_1.

En sommant les inégalités (5) pour $i \in [\![1, k]\!]$, on a :

$\sum\limits_{i=1}^{k} E(Z_i^{(m)}) \leq \sum\limits_{1=i}^{k} \dfrac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}$, c'est-à-dire :

$$E(V_k^{(m)}) \leq k \times \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \quad (6).$$

f)ii)D'après l'inégalité de Markov, pour toute variable aléatoire positive admettant une espérance, on a :

$\forall a > 0,\ P(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$.

En l'appliquant avec $X \to V_k^{(m)}$ et $a \to k\epsilon$, on a : $P\left(V_k^{(m)} \geq k\epsilon\right) \leq \dfrac{E(V_k^{(m)})}{k\epsilon}$.

En recollant avec (6), on conclut :

$$P\left(V_k^{(m)} \geq k\epsilon\right) \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{m^{1-\alpha}}{\epsilon}.$$

g)i.$E\big(U_k^{(m)}\big) = E(T_k) - E\big(V_k^{(m)}\big) = k\mu - E\big(V_k^{(m)}\big)$.

Or, $E\big(V_k^{(m)}\big) \leq k \times \dfrac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}$.

On déduit : $E\big(U_k^{(m)}\big) \geq k\mu - k \times \dfrac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha}$.

g)ii.Comme $V_k^{(m)}$ est positive, alors $E\big(V_k^{(m)}\big) \geq 0$.

On a alors : $E\big(U_k^{(m)}\big) \leq k\mu$ (voir question g)i.)

En recollant avec l'inégalité g)i., on déduit :

$k\mu - k \times \dfrac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \leq E\big(U_k^{(m)}\big) \leq k\mu$.

Par hypothèse prise par l'énoncé, on a : $\dfrac{\alpha}{\alpha-1} m^{1-\alpha} \leq \epsilon$ et on déduit :

$k\mu - k\epsilon \leq E\big(U_k^{(m)}\big) \leq k\mu$, ou encore : $-k\epsilon \leq E\big(U_k^{(m)}\big) - k\mu \leq 0$.

Donc $\left|E\big(U_k^{(m)}\big) - k\mu\right| \leq k\epsilon$.

g)iii.Montrons que l'événement $\left(\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \geq 2k\epsilon\right)$ est contenu dans l'événement $\left(\left|U_k^{(m)} - E\big(U_k^{(m)}\big)\right| \geq k\epsilon\right)$.

Pour y voir plus clair, on peut se débarasser de la valeur absolue.

$$\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \geq 2k\epsilon \Longleftrightarrow \begin{cases} U_k^{(m)} - k\mu \geq 2k\epsilon \quad (7) \\ \text{ou} \\ U_k^{(m)} - k\mu \leq -2k\epsilon \quad (8) \end{cases}$$

$$\left(\left|U_k^{(m)} - E\big(U_k^{(m)}\big)\right| \geq k\epsilon\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} U_k^{(m)} - E\big(U_k^{(m)}\big) \geq k\epsilon \quad (9) \\ \text{ou} \\ U_k^{(m)} - E\big(U_k^{(m)}\big) \leq -k\epsilon \quad (10) \end{cases}$$

La question g)ii) donne : $k\mu + k\epsilon \geq E\big(U_k^{(m)}\big) \quad (11)$ et $k\mu - k\epsilon \leq E\big(U_k^{(m)}\big) \quad (12)$.

• Si (7) est réalisée, alors (7)+(11) donne : $U_k^{(m)} + k\epsilon \geq E\big(U_k^{(m)}\big) + 2k\epsilon$,
soit $U_k^{(m)} - E\big(U_k^{(m)}\big) \geq k\epsilon$, ce qui réalise (9).

• Si (8) est réalisée, alors (8)+(12) donne : $U_k^{(m)} - k\epsilon \leq E\big(U_k^{(m)}\big) - 2k\epsilon$,
soit $U_k^{(m)} - E\big(U_k^{(m)}\big) \leq -k\epsilon$, ce qui réalise (10).

On a donc bien montré que $\left(\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \geq 2k\epsilon\right) \subset \left(\left|U_k^{(m)} - E\big(U_k^{(m)}\big)\right| \geq k\epsilon\right)$.

Par croissance de la probabilité, on conclut :

$$P\left(\left(\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \geq 2k\epsilon\right)\right) \leq P\left(\left(\left|U_k^{(m)} - E\big(U_k^{(m)}\big)\right| \geq k\epsilon\right)\right).$$

g)iv.Les variables aléatoires X_1,...,X_k étant mutuellement indépendantes et de même loi, il en est de même intuitivement pour les variables aléatoires $Y_1^{(m)}$, ..., $Y_k^{(m)}$ puisque $Y_i^{(m)}$ ne dépend que de X_i.

$$
\begin{aligned}
V\big(U_k^{(m)}\big) &= V\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i^{(m)}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k} V\big(Y_i^{(m)}\big) \quad \text{par indépendance}\\
&= \sum_{i=1}^{k} V\big(Y_1^{(m)}\big) \quad \text{car les } Y_1^{(m)} \text{ ont la même loi}
\end{aligned}
$$

La question 9)c)ii) donne : $V\big(Y_1^{(m)}\big) \leq m\mu$.

En sommant les inégalités, on conclut :

$$V\big(U_k^{(m)}\big) \leq km\mu.$$

g)v.L'inégalité de Bienaymé-Tchébychev appliquée à $U_k^{(m)}$ donne :

$P\left(\left|U_k^{(m)} - E\big(U_k^{(m)}\big)\right| \geq k\epsilon\right) \leq \dfrac{V\big(U_k^{(m)}\big)}{(k\epsilon)^2}$.

Comme $V\big(U_k^{(m)}\big) \leq km\mu$, on déduit : $P\left(\left|U_k^{(m)} - E\big(U_k^{(m)}\big)\right| \geq k\epsilon\right) \leq \dfrac{km\mu}{(k\epsilon)^2}$,

c'est-à-dire : $P\left(\left|U_k^{(m)} - E\big(U_k^{(m)}\big)\right| \geq k\epsilon\right) \leq \dfrac{m\mu}{k\epsilon^2}$.

En recollant avec l'inégalité g)iii., on conclut :

$$P\left(\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \geq 2k\epsilon\right) \leq \frac{m\mu}{k\epsilon^2}.$$

h)i.La formule du crible donne pour tous événements A et B :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Comme $P(A \cup B) \leq 1$, on déduit : $P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$.
D'où $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

h)ii. Posons $A = \left(V_k^{(m)} < k\epsilon\right)$ et $B = \left(U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\epsilon), k(\mu + 2\epsilon)[\right)$.
Supposons que $A \cap B$ est réalisé. On a alors :
$0 \leq V_k^{(m)} < k\epsilon$ et $k(\mu - 2\epsilon) < U_k^{(m)} < k(\mu + 2\epsilon)$.
En ajoutant membre à membre ces inégalités, on a :
$k(\mu - 2\epsilon) < T_k < k(\mu + 3\epsilon)$ et comme $k(\mu - 3\epsilon) < k(\mu - 2\epsilon)$, on déduit :
$T_k \in]k(\mu - 3\epsilon), k(\mu + 3\epsilon)[$.
Ainsi, $A \cap B \subset (T_k \in]k(\mu - 3\epsilon), k(\mu + 3\epsilon)[)$.
Par croissance de la probabilité : $P(A \cap B) \leq P\big(T_k \in]k(\mu - 3\epsilon), k(\mu + 3\epsilon)[\big)$.
En recollant avec l'inégalité h)i., on déduit :
$P\big(T_k \in]k(\mu - 3\epsilon), k(\mu + 3\epsilon)[\big) \geq P(A) + P(B) - 1$, c'est-à-dire :
$P\big(T_k \in]k(\mu - 3\epsilon), k(\mu + 3\epsilon)[\big) \geq P(V_k^{(m)} < k\epsilon) + P(U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\epsilon), k(\mu + 2\epsilon)[) - 1$.

h)iii. Les événements $\left(U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\epsilon), k(\mu + 2\epsilon)[\right)$ et $\left(\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \geq 2k\epsilon\right)$ sont contraires.

Donc $P\left(U_k^{(m)} \in]k(\mu-2\epsilon), k(\mu+2\epsilon)[\right) = 1 - P\left(\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \geq 2k\epsilon\right)$.
Or, la question g)v. donne : $P\left(\left|U_k^{(m)} - k\mu\right| \geq 2k\epsilon\right) \leq \dfrac{m\mu}{k\epsilon^2}$.
On déduit : $P\left(U_k^{(m)} \in]k(\mu-2\epsilon), k(\mu+2\epsilon)[\right) \geq 1 - \dfrac{m\mu}{k\epsilon^2} \quad (13)$
De plus, $P\left(V_k^{(m)} < k\epsilon\right) = 1 - P\left(V_k^{(m)} \geq k\epsilon\right)$ et $P\left(V_k^{(m)} \geq k\epsilon\right) \leq \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\dfrac{m^{1-\alpha}}{\epsilon}$.
Donc $P\left(V_k^{(m)} < k\epsilon\right) \geq 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\dfrac{m^{1-\alpha}}{\epsilon} \quad (14)$
En ajoutant (13) et (14), on a :
$P\left(V_k^{(m)} < k\epsilon\right) + P\left(U_k^{(m)} \in]k(\mu-2\epsilon), k(\mu+2\epsilon)[\right) \geq 2 - \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\dfrac{m^{1-\alpha}}{\epsilon} - \dfrac{m\mu}{k\epsilon^2}$
Ce qui donne enfin :
$P\left(V_k^{(m)} < k\epsilon\right) + P\left(U_k^{(m)} \in]k(\mu-2\epsilon), k(\mu+2\epsilon)[\right) - 1 \geq 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\dfrac{m^{1-\alpha}}{\epsilon} - \dfrac{m\mu}{k\epsilon^2}$.
En recollant avec h)ii., on conclut :
$P\big(T_k \in]k(\mu-3\epsilon), k(\mu+3\epsilon)[\big) \geq 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\dfrac{m^{1-\alpha}}{\epsilon} - \dfrac{m\mu}{k\epsilon^2}$.

h)iv. L'inégalité précédente est valable pour tout entier $m \geq m_0$.
Prenons $k \geq m_0^2$, on a alors $\sqrt{k} \geq m_0$.
Pour tout $k \geq m_0^2$, choisissons donc un entier $m \in [\sqrt{k}, 2\sqrt{k}]$. Cet entier m est tel que $m \geq m_0$ et il dépend de k, notons-le m_k.
De l'encadrement $\sqrt{k} \leq m_k \leq 2\sqrt{k}$, on déduit en mutilpliant par $\dfrac{\mu}{k\epsilon^2}$:
$\dfrac{\mu}{\sqrt{k}\epsilon^2} \leq \dfrac{m_k\mu}{k\epsilon^2} \leq \dfrac{2\mu}{\sqrt{k}\epsilon^2}$.
$\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\mu}{\sqrt{k}\epsilon^2} = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{2\mu}{\sqrt{k}\epsilon^2} = 0$. D'après les gendarmes, $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{m_k\mu}{k\epsilon^2} = 0 \quad (15)$
De l'encadrement $\sqrt{k} \leq m_k \leq 2\sqrt{k}$, on déduit par décroissance de $x \mapsto x^{1-\alpha}$:
$\left(\sqrt{k}\right)^{1-\alpha} \geq m_k^{1-\alpha} \geq 2\left(\sqrt{k}\right)^{1-\alpha}$, soit $\dfrac{1}{k^{\frac{\alpha-1}{2}}} \geq m_k^{1-\alpha} \geq \dfrac{2}{k^{\frac{\alpha-1}{2}}}$.
$\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{k^{\frac{\alpha-1}{2}}} = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{2}{k^{\frac{\alpha-1}{2}}} = 0$ car $\frac{\alpha-1}{2} > 0$.
D'après les gendarmes, $\lim\limits_{k\to+\infty} m_k^{1-\alpha} = 0 \quad (16)$
De (15) et (16), on déduit :
$\lim\limits_{k\to+\infty} \left(1 - \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\dfrac{m_k^{1-\alpha}}{\epsilon} - \dfrac{m_k\mu}{k\epsilon^2}\right) = 1$.
Par ailleurs, h)iii. donne :
$1 - \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\dfrac{m^{1-\alpha}}{\epsilon} - \dfrac{m\mu}{k\epsilon^2} \leq P\big(T_k \in]k(\mu-3\epsilon), k(\mu+3\epsilon)[\big) \leq 1$.
D'après les gendarmes, $\lim\limits_{k\to+\infty} P\big(T_k \in]k(\mu-3\epsilon), k(\mu+3\epsilon)[\big) = 1$, ou encore :
$\lim\limits_{k\to+\infty} P\left(\dfrac{T_k}{k} \in]\mu-3\epsilon, \mu+3\epsilon[\right) = 1$.