Révisions - séance 1

<u>Exercice</u> (d'après edhec 2002)
Pour tout nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$, la *partie entière* de x, c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On pose $Y = \lfloor X \rfloor$. La variable aléatoire Y est donc discrète et on a :

$$\forall k \in \mathbf{Z},\ (Y = k) = (k \leq X < k+1).$$

1)a)Montrer que $P(Y < 0) = 0$, puis conclure que $Y(\Omega) = \mathbf{N}$.

b)Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, montrer que

$$P(Y = k-1) = e^{-\lambda(k-1)}\left(1 - e^{-\lambda}\right).$$

c)En déduire que $Y+1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

d)Préciser $E(Y+1)$ et $V(Y+1)$. En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$.

2)On pose $Z = X - Y$.
a)Déterminer $Z(\Omega)$.

b)En utilisant le système complet d'événements $(Y = k)_{k \in \mathbf{N}}$, montrer que

$$\forall x \in [0,1[,\ P(Z \leq x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(k \leq X \leq x + k).$$

Conclure que

$$\forall x \in [0,1[,\ P(Z \leq x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

c)Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z.

d)Montrer que Z est à densité, puis donner une densité f_Z de Z.

e)Déterminer $E(Z)$ de deux façons différentes.