TD5 - compléments sur les fonctions

Exercice 1 ★ ☆ ☆☆
Déterminer un équivalent simple de $\left(3x^2 - 5x\right)^4$ en $+\infty$, $-\infty$, 0 et 1.

Exercice 2 ★ ☆ ☆☆
Montrer que $x + \sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} x$ et $x + \sqrt{x} \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$.

Exercice 3 ★ ☆ ☆☆
Pour chacune des expressions suivantes, déterminer un équivalent simple, puis la limite au point indiqué.

1)$\dfrac{\left(e^x - 1\right)^2}{3x\ln(1+x)}$ en 0 2)$\dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2}$ en 0^+ 3)$\dfrac{x^2 - 2x + 1}{\ln x}$ en 1.

Exercice 4 ★ ☆ ☆☆
1)Déterminer un équivalent simple en 0 de $\ln(1+2x)$.
2)En déduire que $\ln(1+2x) \underset{0}{=} o\left(x \ln x\right)$.

Exercice 5 ★ ★ ☆☆
Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 6 ★ ★ ☆☆
Répondre par vrai ou faux (en justifiant bien sûr !)
1)$x^3 \underset{+\infty}{=} o\left(x^4\right)$ 2)$x \underset{0}{=} o\left(x^2\right)$ 3)$e^{x+1} \underset{+\infty}{\sim} e^x$ 4)$\ln(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.

Exercice 7 ★ ★ ☆☆
En partant de la définition, montrer que $x^3 - x^2 - x + 1 \underset{1}{=} o(x-1)$.

Exercice 8 ★ ★ ☆☆
A l'aide du théorème des croissances comparées, déterminer les limites suivantes :
1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^3 + x^2}$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x - \ln x}$ 3) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^3 \ln\left(\dfrac{x^2}{1+x}\right)$ 4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + xe^{-x}\right)$.

Exercice 9 ★ ☆ ☆☆
Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} x2^x$.

Exercice 10 ★ ☆ ☆☆
Déterminer le DL à l'ordre 2 en 0 des fonctions suivantes :
1)$f : x \mapsto \ln(1+x) + 2e^x$
2)$g : x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$
3)$h : x \mapsto \sqrt{1+x}$
4)$i : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

Exercice 11 ★ ★ ☆☆
Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{e^x - x - 1}$.

<u>Exercice 12</u> ★ ★ ☆☆

Déterminer le DL à l'ordre 2 en a des fonctions suivantes :

1)$f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ $\qquad a = 1$

2)$g : x \mapsto \sqrt{x+2}$ $\qquad a = 2$

3)$h : x \mapsto e^{\frac{1}{1-x}}$ $\qquad a = 0$

4)$i : x \mapsto x \ln x$ $\qquad a = e$.

<u>Exercice 13</u> ★ ★ ☆☆

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \ln\left(1+x+x^2\right)$.

1)Déterminer le DL de f à l'ordre 2 en 0.

2)En déduire l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en 0, puis étudier la position relative de T et $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.

<u>Exercice 14</u> ★ ★ ☆☆

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbf{R}^*,\ f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

1)Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ et vérifiant :

$$\forall x \neq 0,\ f(x) = x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{\varphi(x)}{x}.$$

3)En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique D en $+\infty$, puis étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et D au voisinage de $+\infty$.

<u>Exercice 15</u> ★ ★ ★★

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)$.

<u>Exercice 16</u> (extrait essec 2008) ★ ★ ★☆

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \left]0,1\right[,\ f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

1)Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et en 1.
Par la suite, on note encore f son prolongement sur $[0,1]$.

2)Justifier que f est dérivable sur $]0,1[$ et mettre l'expression de f' sous la forme :

$$f'(x) = \frac{h(x)}{(1-x^2)\left(\ln(1-x)\right)^2}.$$

3)Déterminer les variations de h sur $]0,1[$.

4)Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.

Indications / Réponses

Exercice 1

On trouve à l'aide de P2,P3 et P4 : $\left(3x^2-5x\right)^4 \underset{\pm\infty}{\sim} 81x^8$ et $\left(3x^2-5x\right)^4 \underset{0}{\sim} 625x^4$.

A l'aide de P2, on a : $\left(3x^2-5x\right)^4 \underset{1}{\sim} 16$.

Exercice 2

Revenir à la définition d'un équivalent.

Exercice 3

En utilisant le THM1, on obtient :

1) $\dfrac{(e^x-1)^2}{3x\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{3}$, puis $\displaystyle\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)^2}{3x\ln(1+x)} = \dfrac{1}{3}$.

2) $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{2x}$, puis $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2} = +\infty$.

3) $\dfrac{x^2-2x+1}{\ln x} \underset{1}{\sim} x-1$, puis $\displaystyle\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{\ln x} = 0$.

Exercice 4

1)A l'aide du THM1, on a : $\ln(1+2x) \underset{0}{\sim} 2x$.

Exercice 5

Ecrire l'expression à l'aide d'une exponentielle et d'un logarithme, puis utiliser le THM1.

Exercice 6

1)vrai 2)faux 3)faux 4)vrai.

Exercice 7

x^3-x^2-x+1 a une racine évidente !

Exercice 8

1)Au dénominateur, factoriser par x^3.
2)Au dénominateur, factoriser par x.
3)Séparer le logarithme en deux.
4)Utiliser que $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

Exercice 9

On écrit $x2^x = xe^{x\ln 2}$.

Exercice 10

Utiliser le THM4. On trouve :

1) $f(x) = 2+3x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$
2) $g(x) = x-x^2+o(x^2)$
3) $h(x) = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$
4) $i(x) = 1-2x+3x^2+o(x^2)$.

Exercice 11

Chercher un développement limité du numérateur et du dénominateur, puis leur trouver un équivalent simple en 0.

Exercice 12

On trouve :

1)$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ et $f''(x) = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$

$f(1) = \frac{1}{2}$, $f'(1) = -\frac{1}{2}$ et $f''(1) = \frac{1}{2}$.

Donc $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + o\big((x-1)^2\big)$.

2)$g(x) = (x+2)^{1/2}$, $g'(x) = \frac{1}{2}(x+2)^{-1/2}$ et $g''(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^{-3/2}$

$g(2) = 2$, $g'(2) = \frac{1}{4}$ et $g''(2) = -\frac{1}{32}$.

Donc $g(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{64}(x-2)^2 + o\big((x-2)^2\big)$.

3)$h(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$, $h'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}e^{\frac{1}{1-x}}$ et $h''(x) = \frac{3-2x}{(1-x)^4}e^{\frac{1}{1-x}}$

$h(0) = e$, $h'(0) = e$ et $h''(0) = 3e$.

Donc $h(x) = e + ex + \frac{3e}{2}x^2 + o(x^2)$.

4)$i(x) = x\ln x$, $i'(x) = \ln x + 1$ et $i''(x) = \frac{1}{x}$.

$i(e) = e$, $i'(e) = 2$ et $i''(e) = \frac{1}{e}$.

Donc $i(x) = e + 2(x-e) + \frac{1}{2e}(x-e)^2 + o\big((x-e)^2\big)$.

Exercice 13

1)On trouve :

$f(x) = \ln(1+x+x^2)$, $f'(x) = \frac{1+2x}{1+x+x^2}$ et $f''(x) = \frac{1-2x-2x^2}{(1+x+x^2)^2}$

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $f''(0) = 1$.

Donc $f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

2)T a pour équation $y = x$.

Pour la position relative, trouver un équivalent simple en 0 de $f(x) - x$.

Exercice 14

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2)Commencer par écrire le DL à l'ordre 2 en 0 de e^X.

3)La droite D a pour équation $y = x + 1$ et se situe sous $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 16

4)On détermine $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ en écrivant un DL à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$.