Correction DS3 - ecg2 - maths appliquées

Exercice 1

Partie A

1)Pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k^2} = \frac{k(k+1) - k^2 - (k+1)}{k^2(k+1)} = \frac{-1}{k^2(k+1)} \leq 0.$

Et $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - k(k-1) - (k-1)}{k^2(k-1)} = \frac{1}{k^2(k-1)} \geq 0.$

Donc $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$

2)Soient n et p deux entiers tels que $2 \leq n \leq p$.

En sommant les inégalités précédentes pour $k \in [\![n, p]\!]$, on a :

$\sum_{k=n}^{p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leq \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n}^{p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$

Or, $\sum_{k=n}^{p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$

$= \frac{1}{n} - \frac{1}{p+1}$ par télescopage des termes.

Par télescopage, on obtient de même : $\sum_{k=n}^{p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{p}.$

On conclut que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{p+1} \leq \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{p}.$$

3)Soit $n \geq 2$.

La série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ est convergente (série de Riemann de paramètre $2 > 1$).

Ainsi, $\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$

On a de plus : $\lim_{p \to +\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{n}$ et $\lim_{p \to +\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{n-1}.$

En passant à la limite dans les inégalités de la question 2) avec $p \to +\infty$, on conclut que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1}.$$

4)Pour tout entier $n \geq 2$, on déduit en multipliant par n :

$$1 \leq n\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{n}{n-1}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n-1} = 1$ car $n-1 \underset{+\infty}{\sim} n$.

La propriété des gendarmes donne alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = 1$.

Ce qui prouve que $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Partie B

5)$u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{1}{2}$,

$u_3 = \dfrac{4u_2}{4+u_2} = \dfrac{2}{4+\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{9}$,

$u_4 = \dfrac{9u_3}{9+u_3} = \dfrac{4}{9+\frac{4}{9}} = \dfrac{36}{85}$.

6)On fait un raisonnement par récurrence.

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « u_n existe et $u_n > 0$ ».

$\mathscr{P}(1)$ est vraie puisque $u_1 = 1 > 0$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Comme $n^2 \geq 1$ et $u_n > 0$, alors $n^2 + u_n > 0$, ce qui assure l'existence de $\dfrac{n^2u_n}{n^2+u_n}$, c'est-à-dire de u_{n+1}.

Enfin, $n^2u_n > 0$ et $n^2 + u_n > 0$. Par quotient, $u_{n+1} > 0$.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n$ existe et $u_n > 0$.

7)a)Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{n^2u_n}{n^2+u_n} - u_n = \dfrac{n^2u_n - u_n\left(n^2+u_n\right)}{n^2+u_n} = -\dfrac{u_n^2}{n^2+u_n} \leq 0.$

Donc $(u_n)_{n\geq1}$ est décroissante.

$(u_n)_{n\geq 1}$ est par ailleurs minorée (par zéro) donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.

b)On note $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Comme $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, on a $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n \leq u_1 = 1$.

On a donc finalement $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 < u_n \leq 1$.

Par passage à la limite, on conclut que $0 \leq L \leq 1$.

8)a)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{n^2+u_n}{n^2u_n} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{n^2}{n^2u_n} + \dfrac{u_n}{n^2u_n} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{n^2}.$

b)Supposons que $L = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$, ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.

La série télescopique $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$ est donc divergente.

D'après la question 8)a), cela signifierait que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ diverge.

Ceci est absurde car c'est une série convergente (Riemann de paramètre $2 > 1$).

Ainsi, $L \neq 0$ et comme on sait déjà que $0 \leq L \leq 1$, on a donc $L > 0$.

9)a)La question 8)a donne : $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \dfrac{1}{u_{k+1}} - \dfrac{1}{u_k} = \dfrac{1}{k^2}$.

En sommant ces égalités pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ (avec $n \geq 2$), on obtient :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}$, c'est-à-dire :

$\displaystyle\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}}\right) + \left(\frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n-2}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2}\right) + \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}.$

Les termes du membre de gauche se télescopent, ce qui donne :

$\displaystyle\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}.$

Comme $u_1 = 1$, on a finalement pour tout entier $n \geq 2$:

$$\frac{1}{u_n} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}.$$

Remarque
La somme télescopique de gauche a été écrite en extension suivant les indices k décroissants, afin de mieux voir les termes qui partent.

b)On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}\right) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

D'après la question 9)a), on a :

$\frac{1}{u_n} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \qquad (1)$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient :

$\frac{1}{L} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \qquad (2)$

En soustrayant (1) à (2), on déduit :

$\frac{1}{L} - \frac{1}{u_n} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$.

On conclut que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\frac{1}{L} - \frac{1}{u_n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

10)On peut revenir à la définition d'une fonction négligeable.

$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \frac{u_n - L - \frac{L^2}{n}}{\frac{1}{n}} = n\,(u_n - L) - L^2 \qquad (3)$

Par ailleurs, d'après 9)b), en mettant au même dénominateur le membre de gauche, on a :

$u_n - L = L u_n \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

En substituant dans (3), on a :

$\frac{u_n - L - \frac{L^2}{n}}{\frac{1}{n}} = L u_n \left(n \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right) - L^2$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} L u_n = L \times L = L^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right) = 1$ d'après 4)a).

On conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n - L - \frac{L^2}{n}}{\frac{1}{n}} = 0$, soit $u_n - L - \frac{L^2}{n} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{=} L + \frac{L^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Remarque

On vient d'obtenir un développement asymptotique de u_n.

Partie C

11)Programme :

```
def suite(n):
    u=1
    for k in range(1,n):
        u=(k**2*u)/(k**2+u)
    return u
```

12)Comme on l'a vu précédemment dans le calcul de la question 10), on a :

$u_n - L = Lu_n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \qquad (4)$

D'autre part, la question 3) donne : $\frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1}$.

En multipliant membre à membre par $Lu_n > 0$ et grâce à (4), on déduit :

$\frac{Lu_n}{n} \leq u_n - L \leq \frac{Lu_n}{n-1}$, puis $0 \leq u_n - L \leq \frac{Lu_n}{n-1}$.

Comme $L \leq 1$, on a $\frac{Lu_n}{n-1} \leq \frac{u_n}{n-1}$, d'où $0 \leq u_n - L \leq \frac{u_n}{n-1}$.

On a donc bien pour tout entier $n \geq 2$:

$$|u_n - L| \leq \frac{u_n}{n-1}.$$

13)Pour que u_n soit une valeur approchée de L à ϵ près, il faut que $|u_n - L| \leq \epsilon$.

Il suffit donc de choisir n se sorte que $\frac{u_n}{n-1} \leq \epsilon$.

D'où le programme :

```
def valeur_approchee(epsilon):
    n=2
    while suite(n)/(n-1)>epsilon:
        n=n+1
    return suite(n)
```

Exercice 2

Partie A

1) $\lim_{x\to+\infty}(1+x^n)=+\infty$ et $\lim_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$.

Par composition, $\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=+\infty$.

2) f_n est de classe C^2 sur $[0,+\infty[$ comme composée de fonctions C^2.

$\forall x\geq 0,\ f_n'(x)=\dfrac{nx^{n-1}}{1+x^n}\geq 0$. Donc f_n est croissante sur $[0,+\infty[$.

3) Pour tout $x\geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} f_n''(x) &= \frac{n(n-1)x^{n-2}\left(1+x^n\right)-nx^{n-1}nx^{n-1}}{\left(1+x^n\right)^2}\\ &= \frac{nx^{n-2}\big((n-1)(1+x^n)-nx^n\big)}{\left(1+x^n\right)^2}\\ &= \frac{nx^{n-2}\big(n+nx^n-1-x^n-nx^n\big)}{\left(1+x^n\right)^2}\\ &= \frac{nx^{n-2}\left(n-1-x^n\right)}{\left(1+x^n\right)^2}. \end{aligned}$$

4) $\forall n\geq 2,\ \forall x\geq 0,\ \dfrac{nx^{n-2}}{\left(1+x^n\right)^2}\geq 0$ donc $f_n''(x)$ est du signe de $n-1-x^n$.

Or, $n-1-x^n\geq 0\iff x^n\leq n-1\iff x\leq (n-1)^{\frac{1}{n}}$.

Donc f est convexe sur $\left[0,(n-1)^{\frac{1}{n}}\right]$ et concave sur $\left[(n-1)^{\frac{1}{n}},+\infty\right[$.

Donc $\mathscr{C}_n$ admet un unique point d'inflexion I_n d'abscisse $(n-1)^{\frac{1}{n}}$.

Son ordonnée est $f_n\left((n-1)^{\frac{1}{n}}\right)=\ln\big(1+(n-1)\big)=\ln n$.

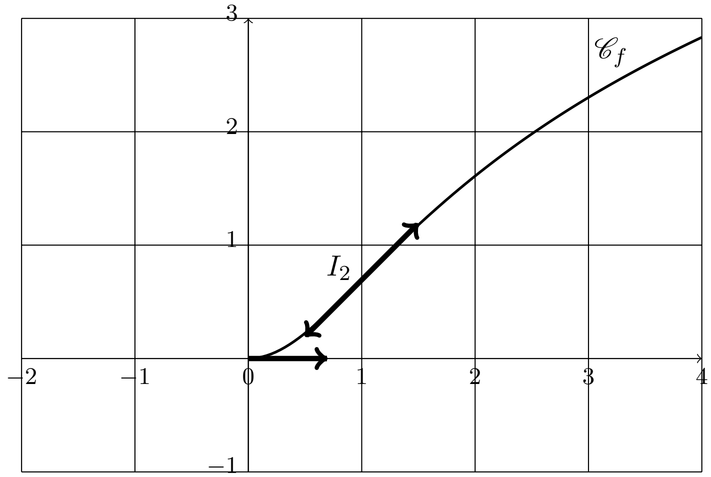
Donc $I_n\left((n-1)^{\frac{1}{n}},\ln n\right)$.

5) On a ici $\forall x\geq 0,\ f_2'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

La tangente à $\mathscr{C}_2$ en O a pour coefficient directeur $f_2'(0)=0$.

Les coordonnées de I_2 sont $\left((2-1)^{\frac{1}{2}},\ln 2\right)=(1,\ln 2)$.

La tangente à $\mathscr{C}_2$ en I_2 a pour coefficient directeur $f_2'(1)=1$.



Partie B

6)Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

g_n est dérivable (donc continue) sur $[0,+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

$\forall x \geq 0,\ g_n'(x) = \ln(1+x^n) + x \times \dfrac{nx^{n-1}}{1+x^n} = \ln(1+x^n) + \dfrac{nx^n}{1+x^n}$.

Comme $x \geq 0$, on a : $1+x^n \geq 1$, puis $\ln(1+x^n) \geq 0$.

De plus, $\dfrac{nx^n}{1+x^n} \geq 0$.

Par somme, $\forall x \geq 0,\ g_n'(x) \geq 0$.

On a aussi $\forall x > 0,\ g_n'(x) > 0$ donc g_n est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

La continuité de g_n en 0 assure que g_n est également strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

g_n étant continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g_n\big([0,+\infty[\big) = [0,+\infty[$.

$1 \in [0,+\infty[$ admet donc un unique antécédent par g_n. En appelant x_n cet antécédent, on a bien $x_n \in [0,+\infty[$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $g_n(x) = 1$ admet une unique solution $x_n \geq 0$.

7)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$g_n(1) = \ln 2 < 1$,

$g_n(x_n) = 1$ par construction,

$g_n(2) = 2\ln(1+2^n) \geq 2\ln 3 \approx 2,2 > 1$.

Donc $g_n(1) < g_n(x_n) < g_n(2)$, puis $1 < x_n < 2$ par stricte croissance de g_n.

8)Pour tout $x \geq 1$, on a :

$x^{n+1} \geq x^n$, en multipliant membre à membre par x^n

puis, $1 + x^{n+1} \geq 1 + x^n$.

Par croissance du logarithme, on déduit : $\ln\left(1 + x^{n+1}\right) \geq \ln\left(1 + x^n\right)$.

En multipliant membre à membre par $x \geq 0$, on conclut que

$x \ln\left(1 + x^{n+1}\right) \geq x \ln\left(1 + x^n\right)$.

Ainsi, $\forall x \geq 1,\ g_{n+1}(x) \geq g_n(x)$.

9)Comme $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ x_{n+1} \geq 1$, on peut utiliser l'égalité ci-dessus pour $x = x_{n+1}$, ce qui donne pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$\underbrace{g_{n+1}\left(x_{n+1}\right)}_{=1} \geq g_n\left(x_{n+1}\right)$. Donc $g_n\left(x_{n+1}\right) \leq 1 \qquad (1)$

De plus, $g_n\left(x_n\right) = 1 \qquad (2)$

(1) et (2) donnent alors : $g_n\left(x_{n+1}\right) \leq g_n\left(x_n\right)$.

g_n étant strictement croissante, on conclut que $x_{n+1} \leq x_n$.

Donc la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Etant minorée par 1, elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.

Par passage à la limite dans l'égalité $1 < u_n < 2$, on obtient : $1 \leq L \leq 2$.

10)a)Supposons $L > 1$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on écrit : $(x_n)^n = e^{n \ln x_n}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = L$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln x_n = \ln L > 0$ car $L > 1$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln x_n = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. Par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{n \ln x_n} = +\infty$.

Ainsi, si $L > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n)^n = +\infty$.

b)$\bullet$ Supposons $L > 1$.

La question précédente donne alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n)^n = +\infty$.

Cela entraîne que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(1 + (x_n)^n\right) = +\infty$.

Comme par ailleurs, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = L > 0$, on déduit par produit :

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \ln\left(1 + (x_n)^n\right) = +\infty$.

C'est-à-dire : $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n\left(x_n\right) = +\infty$.

Ceci contredit le fait que $g_n\left(x_n\right) = 1$.

Donc $L \leq 1$ et comme on sait d'après la question 9) que $1 \leq L \leq 2$, on a donc $L = 1$.

• On a les équivalences :

$$\begin{aligned} g_n(x_n)=1 &\Longleftrightarrow x_n \ln\left(1+(x_n)^n\right)=1 \\ &\Longleftrightarrow \ln\left(1+(x_n)^n\right)=\frac{1}{x_n} \\ &\Longleftrightarrow 1+(x_n)^n=e^{\frac{1}{x_n}} \\ &\Longleftrightarrow (x_n)^n=e^{\frac{1}{x_n}}-1. \end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{x_n}=1$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{x_n}}-1=e-1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)^n=e-1$.

d)Du calcul fait ci-dessus, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\big((x_n)^n\big)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(e^{\frac{1}{x_n}}-1\right)$,

c'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\big(x_n\big)=\ln(e-1)$.

Donc $\ln(x_n)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\ln(e-1)}{n}$ (2)

Enfin, comme $\ln(x)\underset{1}{\sim}x-1$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1$, on conclut :

$\ln(x_n)\underset{1}{\sim}x_n-1$ (3)

Par transitivité, (2) et (3) donnent : $x_n-1\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\ln(e-1)}{n}$.

Partie C

1)$\forall x\geq 0,\ 1+x\geq 1$ donc $\ln(1+x)\geq\ln 1$ par croissance du logarithme.

Donc $\forall x\geq 0,\ 0\leq\ln(1+x)$ (4)

De plus, la fonction $f : x\mapsto\ln(1+x)$ est de classe C^2 sur $[0,+\infty[$ par composée de fonctions de classe C^2.

$\forall x\geq 0,\ f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, puis $f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}\leq 0$.

Donc f est concave sur $[0,+\infty[$.

$\mathscr{C}_f$ est donc au-dessous de ses tangentes.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 a pour équation $y=f'(0)x+f(0)$, soit $y=x$.

On a donc $\forall x\geq 0,\ \ln(1+x)\leq x$ (5)

De (4) et (5), on conclut que $\forall x\geq 0,\ 0\leq\ln(1+x)\leq x$.

Remarque

On peut aussi montrer l'inégalité de droite en étudiant les variations, puis le signe sur $[0,+\infty[$ de la fonction $x\mapsto x-\ln(1+x)$.

2)Les inégalités précédentes s'appliquent en faisant $x\to x^n$ puisque si $x\geq 0$, alors $x^n\geq 0$.

On a alors, $\forall x \geq 0,\ 0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$.
En intégrant ces inégalités entre les bornes croissantes 0 et 1, on a :
$0 \leq \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leq \int_0^1 x^n dx$.
Avec $\displaystyle\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3)Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$, posons $t = 1+x$.

- $t = 1+x \Longleftrightarrow x = t-1 = \varphi(t)$.
- $x = 0 \Longleftrightarrow t = 1$ et $x = 1 \Longleftrightarrow t = 2$.
- $\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{t-1}{t}$.
- $dx = \varphi'(t)dt = 1dt = dt$.

La fonction φ est de classe C^1 sur $[1,2]$. La formule de changement de variable s'applique et donne :
$J_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx = \int_1^2 \frac{t-1}{t}dt$, où
$\displaystyle\int_1^2 \frac{t-1}{t}dt = \int_1^2 \left(1-\frac{1}{t}\right)dt = [t-\ln t]_1^2 = (2-\ln 2)-(1-\ln 1) = 1-\ln 2$.
Donc $J_1 = 1-\ln 2$.

4)Faisons une intégration par parties dans $nJ_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}dx$, qu'on réécrit sous la forme $nJ_n = \displaystyle\int_0^1 x\left(\frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\right)dx$.

On pose : $u(x) = x \qquad v'(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{1+x^n}$

$\qquad u'(x) = 1 \qquad v(x) = \ln(1+x^n)$.

u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$. L'IPP est valide et donne :
$\displaystyle\int_0^1 x\left(\frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\right)dx = \left[x\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$.
C'est-à-dire : $nJ_n = \ln 2 - I_n$.

5) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nJ_n = \ln 2$, ce qui prouve que $J_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln 2}{n}$.
Enfin, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln 2}{n} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.

Exercice 3 (un peu inspiré d'edhec 2012)

Partie A

1)Soit A une matrice diagonalisable de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
Il existe alors une matrice P inversible et une matrice D diagonale, toutes deux dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

On déduit : $A^2 = PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I}DP^{-1} = PD^2P^{-1}$.

Posons $\Delta = D^2$. On a alors : $A^2 = P\Delta P^{-1}$ où Δ est diagonale (en tant que carré d'une matrice diagonale).

Donc A^2 est diagonalisable.

2)$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^4 = \left(A^2\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

3)On a : $A^4 - I = 0$. En posant $P(X) = X^4 - 1$, on a alors $P(A) = 0$, ce qui prouve que P est un polynôme annulateur de A.

4)• $\forall x \in \mathbf{R},\ P(x) = 0 \Longleftrightarrow x^4 - 1 = 0 \Longleftrightarrow (x^2-1)(x^2+1) = 0$
$\Longleftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 1$.

Comme P est un polynôme annulateur de A, le spectre de A est contenu dans l'ensemble des racines de P. Ainsi, $sp(A) \subset \{-1, 1\}$.

• $E_1(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A-I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(A-I)U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 & L_1 \\ 2x - 6y + 4z = 0 & L_2 \\ 3x - 8y + 5z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 & L_1 \\ -2y + 2z = 0 & L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ -2y + 2z = 0 & L_3 \leftarrow 3L_1 + L_3 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow y = z$ et $x = z$.

On déduit :

$$E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = z \text{ et } y = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$E_1(A)$ est non nul donc 1 est bien valeur propre de A. Le sous-espace propre de A associé à 1 est $E_1(A)$.

Enfin, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_1(A)$, et libre car constituée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_1(A)$.

- $E_{-1}(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A + I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
(A + I)U = 0 &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 4 \\ 3 & -8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 & L_1 \\ 2x - 4y + 4z = 0 & L_2 \\ 3x - 8y + 7z = 0 & L_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 & L_1 \\ 8y - 6z = 0 & L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ 14y - 10z = 0 & L_3 \leftarrow 3L_1 - L_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 & L_1 \\ 8y - 6z = 0 & L_2 \\ -2z = 0 & L_3 \leftarrow 7L_2 - 4L_3 \end{cases} \\
&\iff x = y = z = 0.
\end{aligned}$$

Donc $E_{-1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Ainsi, -1 n'est pas valeur propre de A.

On conclut que $sp(A) = \{1\}$.

5)Le seul sous-espace propre de A est $E_1(A)$. Sa dimension vaut 1, elle est inférieure à 3, taille de A.

D'après le théorème de réduction, A n'est pas diagonalisable.

$$6)A^2U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -U.$$

En outre, $U \neq 0$. Donc U est un vecteur propre de A^2 associé à -1.

$$A^2V = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -V.$$

En outre, $V \neq 0$. Donc V est un vecteur propre de A^2 associé à -1.

$$A^2W = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = W.$$

En outre, $W \neq 0$. Donc X est un vecteur propre de A^2 associé à 1.

7)(U,V) est une famille libre car U et V ne sont pas colinéaires.
(W) est une famille libre car elle est constituée d'un seul vecteur non nul.

La famille (U,V,W) est construite par concaténation des deux familles (U,V) et (W) provenant de sous-espaces propres différents.
Donc la famille (U,V,W) est libre.

(U,V,W) est une famille libre de cardinal 3 de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Son cardinal coïncide avec la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. C'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

On vient de construire une base (U,V,W) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ dont chaque vecteur est un vecteur propre de A^2. Donc A^2 est diagonalisable.

Partie B

8)Soit $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ une matrice diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

D est involutive $\Longleftrightarrow D^2 = I \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1 \\ c = \pm 1 \end{cases}.$$

Les 8 matrices diagonales et involutives de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ sont : $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$.

Remarque
On retrouve en particulier les matrices I et $-I$.

9)La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est involutive et non diagonale (cf. partie A).

10)a)L'égalité $(*)$ donne $A^2 - I = 0$ ou encore $(A - I)(A + I) = 0 \quad (**)$

Raisonnement par l'absurde. Supposons que $A - I$ est inversible.
En multipliant à gauche par $(A - I)^{-1}$ dans $(**)$, on obtient $A + I = 0$, c'est-à-dire $A = -I$, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé.
Donc $A - I$ n'est pas inversible.

Par le même raisonnement, en multipliant à droite par $(A + I)^{-1}$ dans $(**)$, on déduit que $A + I$ n'est pas inversible.

On conclut que -1 et 1 sont des valeurs propres de A.

b)Pour tout $\forall X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, on a :
$(A-I)\big((A+I)X\big) = (A-I)(A+I)X = \underbrace{(A^2-I)}_{=0}X = 0.$

Donc $(A+I)X \in E_1(A)$.
$(A+I)\big((A-I)X\big) = (A+I)(A-I)X = \underbrace{(A^2-I)}_{=0}X = 0.$

Donc $(A-I)X \in E_{-1}(A)$.

c)Pour tout $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, on a en développant et en réduisant :
$\frac{1}{2}(A+I)X - \frac{1}{2}(A-I)X = \frac{1}{2}(AX+X) - \frac{1}{2}(AX-X) = X.$

d)• Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. On vient de voir que :

$$X = \frac{1}{2}(A+I)X - \frac{1}{2}(A-I)X \quad (***)$$

On sait aussi que $(A+I)X \in E_1(A)$ et que $E_1(A)$ est un espace vectoriel donc $X_1 = \frac{1}{2}(A+I)X \in E_1(A)$.

De même, $X_2 = -\frac{1}{2}(A-I)X \in E_{-1}(A)$.

On déduit :

$$X = \underbrace{X_1}_{\in E_1(A)} + \underbrace{X_2}_{\in E_2(A)} \quad (****).$$

$\mathscr{B}$ est une base de $E_1(A)$ donc X_1 est CL des vecteurs de $\mathscr{B}$.
De même, X_2 est CL des vecteurs de $\mathscr{C}$.

L'égalité $(****)$ montre alors que X est CL des vecteurs de $\mathscr{D} = \mathscr{B} \cup \mathscr{C}$.

On vient de prouver que tout vecteur $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ s'écrit comme CL des vecteurs de $\mathscr{D}$, ce qui signifie que $\mathscr{D}$ est une famille génératrice de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

• Enfin, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont libres comme bases respectives de $E_1(A)$ et $E_{-1}(A)$. $\mathscr{D} = \mathscr{B} \cup \mathscr{C}$ est donc libre comme concaténation de familles libres provenant de sous-espaces propres différents.

• $\mathscr{D}$ est une famille libre et génératrice de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

On vient de construire une base $\mathscr{D}$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ dont tous les vecteurs sont des vecteurs propres de A. Donc A est diagonalisable.

Remarque
Par le même raisonnement, on montre que toute matrice involutive de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est diagonalisable.