Exercice 1 (edhec 2019)

1)a) $A-I=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $(A-I)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1)b)$(A-I)^2=O$ donne : $A^2-2A+I=O$, puis $A(-A+2I)=I$.
Donc A est inversible et $A^{-1}=-A+2I$.

2)a)Comme $A=N+I$, on a : $N=A-I$ d'où $N^2=(A-I)^2=O$.
I et N commutent, la formule du binôme est licite et donne pour tout $n\in\mathbf{N}$:

$$A^n=(I+N)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}I^{n-k}N^k=\binom{n}{0}I^nN^0+\binom{n}{1}I^{n-1}N^1+O+...+O$$

car pour tout $k\geq 2, N^k=O$.

On a donc $\forall n\in\mathbf{N}, A^n=I+nN$.
Comme $N=A-I$, on déduit $A^n=I+n(A-I)=I+nA-nI$.
Donc $\forall n\in\mathbf{N}, A^n=(1-n)I+nA$.

2)b)Pour $n=-1$, on obtient : $A^{-1}=2I-A$, ce qui est vrai.

3)a)Comme $(A-I)^2=O$, le polynôme $P(X)=(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de A.
1 est l'unique racine de P donc $sp(A)\subset\{1\}$.
De plus, $A-I$ est de rang 1 donc $A-I$ n'est pas inversible, ce qui prouve que 1 est valeur propre de A.
Finalement, $sp(A)=\{1\}$.

3)b)Faisons un raisonnement par l'absurde en supposant que A est diagonalisable.
Alors, il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que

$$A=PDP^{-1}.$$

Les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres de A et valent 1.
On a alors $D=I$, puis $A=PIP^{-1}=I$, ce qui est absurde.

On conclut que A n'est pas diagonalisable.

4)a)$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f-Id)=\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)-\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(Id)=A-I$.
Donc $rg(f-Id)=rg(A-I)=dimVect(C_1,C_2,C_3)$ où C_1, C_2 et C_3 sont les colonnes de $A-I$.

Comme $C_2=C_3$ et $C_1=-C_3$, on a $Vect(C_1,C_2,C_3)=Vect(C_3)$.

(C_3) est une famille génératrice de $Vect(C_1,C_2,C_3)$ et elle est libre car constituée d'un seul vecteur non nul, c'est donc une base de $Vect(C_1,C_2,C_3)$.

Donc $dimVect(C_1,C_2,C_3)=1$, puis $rg(f-Id)=1$.

4)b)• $(f-Id)(u_1)=(f-Id)\big((f-Id)(e_1)\big)=(f-Id)^2(e_1)=0$ puisque $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}\big(f-Id)^2\big)=(A-I)^2=O$.

Donc $u_1\in Ker(f-Id)$.

• $(f-Id)(u_2)=f(u_2)-u_2=f(e_1+e_3)-(e_1+e_3)=f(e_1)+f(e_3)-e_1-e_3$.
La première colonne de A donne : $f(e_1)=-2e_2+e_3$.

La troisième colonne de A donne : $f(e_3) = e_1 + 2e_2$.
On déduit : $(f - Id)(u_2) = -2e_2 + e_3 + e_1 + 2e_2 - e_1 - e_3 = 0$.

Donc $u_2 \in Ker(f - Id)$.

Enfin, $u_1 = (f - Id)(e_1) = f(e_1) - e_1 = (-2e_2 + e_3) - e_1 = -e_1 - 2e_2 + e_3$.

u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires donc la famille (u_1, u_2) est libre.

Enfin, le théorème du rang donne :

$dimKer(f - Id) = dim\mathbf{R}^3 - rg(f - Id) = 3 - 1 = 2$.

Résumons :
(u_1, u_2) est une famille libre de $Ker(f - Id)$ dont le cardinal vaut 2 et coïncide avec la dimension de $Ker(f - Id)$, c'est donc une base de $Ker(f - Id)$.

5)a)On a : $u_1 = (-1, -2, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $e_1 = (1, 0, 0)$.

Pour tous réels a, b et c, on a :

$$\begin{aligned}
au_1 + bu_2 + ce_1 = 0 &\iff a(-1,-2,1) + b(1,0,1) + c(1,0,0) = (0,0,0) \\
&\iff (-a + b + c, -2a, a + b) = (0,0,0) \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} - & a & + & b & + & c & = 0 \\ -2 & a & & & & & = 0 \\ & a & + & b & & & = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} c & = & 0 \\ a & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc la famille (u_1, u_2, e_1) est libre.

C'est une famille libre de $\mathbf{R}^3$ dont le cardinal vaut 3 et coïncide avec la dimension de $\mathbf{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbf{R}^3$.

5)b)$u_1 \in Ker(f - Id)$ donc $f(u_1) = u_1 = 1u_1 + 0u_2 + 0e_1$.

De même $f(u_2) = u_2 = 0u_1 + 1u_2 + 0e_1$.

De plus, $u_1 = f(e_1) - e_1$ donc $f(e_1) = u_1 + e_1 = 1u_1 + 0u_2 + 1e_1$.

Donc $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6)P est la matrice de passage de la base canonique à la base (u_1, u_2, e_1), elle est donc inversible.

La formule de changement de base donne : $T = P^{-1}AP$.

7)a)Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
M \in E \iff & MT = TM \\
\iff & \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} a & b & a+c \\ d & e & d+f \\ g & h & g+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
\iff & \left\{ \begin{array}{lcl} g & = & 0 \\ h & = & 0 \\ a & = & i \\ d & = & 0 \\ g & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Donc} E = & \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, (a,b,c,e,f) \in \mathbf{R}^5 \right\} \\
= & \left\{ a(E_{1,1}+E_{3,3}) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + eE_{2,2} + fE_{2,3}, (a,b,c,e,f) \in \mathbf{R}^5 \right\} \\
= & \text{Vect } (E_{1,1}+E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3}) .
\end{aligned}
$$

$(E_{1,1}+E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$ est donc une famille génératrice de E.

Par ailleurs, cette famille est libre. En effet, pour tous réels a, b, c, d et e, on a :

$a\left(E_{1,1}+E_{3,3}\right) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + dE_{2,2} + eE_{2,3} = O$

$\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\iff a = b = c = d = e = 0.$

$(E_{1,1}+E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$ est donc une base de E et $dim E = 5$.

7)b)Remarquons tout d'abord que $T = P^{-1}AP \iff A = PTP^{-1}$.

Soit $N \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

$$
\begin{aligned}
NA = AN \iff & NPTP^{-1} = PTP^{-1}N \\
\iff & P^{-1}\left(NPTP^{-1}\right)P = P^{-1}\left(PTP^{-1}N\right)P \\
\iff & \left(P^{-1}NP\right)T = T\left(P^{-1}NP\right).
\end{aligned}
$$

7)c)$N \in F$

$\iff NA = AN$

$\iff \left(P^{-1}NP\right)T = T\left(P^{-1}NP\right)$

$\iff P^{-1}NP \in E$

$\iff P^{-1}NP \in \text{Vect } (E_{1,1}+E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$

$\iff \exists (a,b,c,d,e) \in \mathbf{R}^5 \mid P^{-1}NP = a\left(E_{1,1}+E_{3,3}\right) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + dE_{2,2} + eE_{2,3}$

$\iff \exists (a,b,c,d,e) \in \mathbf{R}^5 \mid N = P\left(a\left(E_{1,1}+E_{3,3}\right) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + dE_{2,2} + eE_{2,3}\right)P^{-1}$

$\iff \exists (a,b,c,d,e) \in \mathbf{R}^5 \mid N = aP\left(E_{1,1} + E_{3,3}P^{-1}\right) + bPE_{1,2}P^{-1} + cPE_{1,3}P^{-1} + dPE_{2,2}P^{-1}$
$+ ePE_{2,3}P^{-1}$

$\iff N \in \text{Vect } \left(P\left(E_{1,1}+E_{3,3}\right)P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}\right)$

Donc $F = \text{Vect } \left(P\left(E_{1,1}+E_{3,3}\right)P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}\right)$.

Exercice 2 (edhec 2018)

1)a)La formule des probabilités totales pour le système complet (A_0, A_1, A_2) s'écrit :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(P_1) \\ &= P_{A_0}(P_1)P(A_0) + P_{A_1}(P_1)P(A_1) + P_{A_1}(P_1)P(A_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b)Soit $n \geq 2$. La même formule des probabilités totales donne :

$$P(X=n) = P_{A_0}(X=n) \times \frac{1}{3} + P_{A_1}(X=n) \times \frac{1}{3} + P_{A_1}(X=n) \times \frac{1}{3}$$

On calcule les probabilités conditionnelles.

$$\begin{aligned} P_{A_0}(X=n) &= P_{A_0}(F_1 \cap ... \cap F_{n-1} \cap P_n) \\ &= P_{A_0}(F_1) \times \cdots \times P_{A_0}(F_{n-1}) \times P_{A_0}(P_n) \quad \text{par indépendance des lancers} \\ &= \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

$P_{A_1}(X=n) = P_{A_1}(F_1 \cap ... \cap F_{n-1} \cap P_n) = 0$ car aucun pile ne peut être réalisé avec la pièce 1, puisqu'elle fait toujours face.

$P_{A_2}(X=n) = P_{A_2}(F_1 \cap ... \cap F_{n-1} \cap P_n) = 0$ car aucun face ne peut être réalisé avec la pièce 1, puisqu'elle fait toujours pile.

On déduit que $\forall n \geq 2,\ P(X=n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c)$X(\Omega) = \mathbf{N}$. La famille d'événements $(X=n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc un système complet.

On déduit : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} P(X=0) &= 1 - P(X=1) - \sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n) \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} \qquad \text{en posant } k = n-2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2)$\bullet$ X admet une espérance ssi la série $\sum_{n\geq 0} nP(X=n)$ est absolument convergente, ce qui se ramène à la convergence simple car le terme général est positif.

$\forall n \geq 2,\ nP(X=n) = n\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{6}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$

$\sum_{n\geq 2} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est une série dérivée première de paramètre $1/2 \in]-1,1[$.

Elle est donc convergente.

La série $\sum_{n\geq 0} nP(X=n)$ est de même nature donc convergente.

Donc X admet une espérance.

$$\begin{aligned}
\bullet\ E(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n)\\
&= 0P(X=0) + 1P(X=1) + \sum_{n=2}^{+\infty} nP(X=n)\\
&= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right)\\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1\right)\\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{6}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

3)$\bullet$ D'après le théorème de transfert, $X(X-1)$ admet une espérance ssi la série $\sum_{n\geq 2} n(n-1)P(X=n)$ est absolument convergente, ce qui se ramène à la convergence simple car le terme général est positif.

$\forall n \geq 2,\ n(n-1)P(X=n) = n(n-1)\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{12}n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$

$\sum_{n\geq 2} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ est une série dérivée seconde de paramètre $1/2 \in]-1,1[$.

Elle est donc convergente.

La série $\sum_{n\geq 0} n(n-1)P(X=n)$ est de même nature donc convergente.

Donc $X(X-1)$ admet une espérance.

$$\bullet\ E\big(X(X-1)\big) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P(X=n)$$
$$= \frac{1}{12}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$
$$= \frac{1}{12} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}$$
$$= \frac{4}{3}.$$

• L'égalité $X^2 = X(X-1) + X$ montre que X^2 admet une espérance.

Par linéarité, $E\big(X^2\big) = E\big(X(X-1)\big) + E(X) = \dfrac{4}{3} + 1 = \dfrac{7}{3}$.

X admet donc une variance donnée par la formule de Koenig :

$V(X) = E\big(X^2\big) - E(X)^2 = \dfrac{7}{3} - 1^2 = \dfrac{4}{3}$.

4)C'est une histoire de symétrie. Si dans les questions 1)a) et 1)b), on change X en Y, cela revient à échanger pile et face, ce qui mène aux mêmes calculs.
Donc Y suit la même loi que X.

5)a)Soit $j \geq 2$ un entier.

On a l'inclusion évidente : $\big((X=1) \cap (Y=j)\big) \subset (Y=j)$.

Réciproquement, supposons $(Y=j)$ réalisé. Cela signifie que la premier face est apparu au j-ème lancer. Comme $j \geq 2$, cela impose que le premier lancer est pile, ce qui réalise $(X=1)$.
Donc $(Y=j) \subset \big((X=1) \cap (Y=j)\big)$.

On conclut que $\big((X=1) \cap (Y=j)\big) = (Y=j)$, puis en passant à la probabilité :

$\forall j \geq 2,\ P\big((X=1) \cap (Y=j)\big) = P(Y=j)$.

b)C'est exactement le même raisonnement en échangeant le role de pile et face.

Donc $\forall j \geq 2,\ P\big((X=i) \cap (Y=1)\big) = P(X=i)$.

6)a)Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbf{N}$, on a : $(X+Y)(\Omega) \subset \mathbf{N}$.

• $(X+Y=0) = (X=0) \cap (Y=0)$ est un événement impossible car il se réalise si on ne fait jamais pile et jamais face !

• L'événement $(X+Y=2)$ est la réunion des 3 événements incompatibles :

$$\Big(\underbrace{(X=0)}_{0 \text{ pile}} \cap \underbrace{(Y=2)}_{P_1 \cap F_2}\Big),\ \Big(\underbrace{(X=1)}_{P_1} \cap \underbrace{(Y=1)}_{F_1}\Big),\ \Big(\underbrace{(X=2)}_{F_1 \cap P_2} \cap \underbrace{(Y=0)}_{0 \text{ face}}\Big)$$

L'événement $(X+Y=2)$ est donc impossible.

• Ainsi, $X+Y$ ne peut pas prendre la valeur 0 ou 2. Les autres valeurs entières sont en revanche possibles.
Par exemple, si on lance la pièce 1, les événements $(X=0)$ et $(Y=1)$ sont réalisés. Donc $X+Y=1$.
Et pour $n \geq 3$, on peut par exemple réaliser l'événement $(X+Y=n)$ en lançant la pièce 0 et en faisant $P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_{n-2} \cap F_{n-1}$ (on a : $X=1$ et $Y=n-1$).

b)$(X+Y=1)=\big((X=0)\cap(Y=1)\big)\cup\big((X=1)\cap(Y=0)\big)$.
Or, $(X=0)\subset(Y=1)$ car si l'on ne fait jamais pile, on fait nécessairement face au premier lancer.
Donc $\big((X=0)\cap(Y=1)\big)=(X=0)$.
De même, $(Y=0)\subset(X=1)$ donc $\big((X=1)\cap(Y=0)\big)=(Y=0)$.
Ainsi, $(X+Y=1)=(X=0)\cup(Y=0)$.
Les événements $(X=0)$ et $(Y=0)$ sont incompatibles.
Donc $P(X+Y=1)=P(X=0)+P(Y=0)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$.

c)On peut remarquer que $\big((X=1),(Y=1)\big)$ est un système complet.
En effet, on a : $(X=1)\cap(Y=1)=\emptyset$.
De plus, on a : $(X=1)\cup(Y=1)=\Omega$, puisqu'au premier lancer on fait soit pile, ce qui réalise $(X=1)$, soit face, ce qui réalise $(Y=1)$.
On déduit pour tout entier $n\geq 3$:

$$\begin{aligned}(X+Y=n)&=\big((X+Y=n)\cap(X=1)\big)\cup\big((X+Y=n)\cap(Y=1)\big)\\&=\big((X=1)\cap(Y=n-1)\big)\cup\big((X=n-1)\cap(Y=1)\big).\end{aligned}$$

d)On déduit :

$$\begin{aligned}P(X+Y=n)&=P\big((X=1)\cap(Y=n-1)\big)+P\big((X=n-1)\cap(Y=1)\big)\\&=P(Y=n-1)+P(X=n-1)\quad\text{grâce à 5) avec } n-1\geq 2\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\qquad\text{grâce à 1)b)) avec } n-1\geq 2\\&=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

7)a)programme :

```
import numpy.random as rd
piece=rd.randint(0,3)
x=1
if piece==0:
    lancer=rd.randint(0,2)
    while lancer==0:
        lancer=rd.randint(0,2)
        x=x+1
if piece==1:
    x=0
print(x)
```

b)Si le joueur lance avec la pièce 2, elle fait nécessairement pile au premier lancer, ce qui donne x=1, valeur initialisée en deuxième ligne du programme.

Exercice 3 (edhec 2021)

Partie I :

1)f est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$.

2)a)$\partial_1 f(x,y) = 3x^2 - 3y$ et $\partial_2 f(x,y) = 3y^2 - 3x$.

b)Les points critiques de f sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \partial_1 f(x,y) = 0 \\ \partial_2 f(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases}$$

Or, $x^4 - x = 0 \Longleftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x^3 = 1 \Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ par bijectivité de la fonction cube.

On trouve alors y en remplaçant la valeur de x dans la première équation.

Finalement, les points critiques de f sont $(0,0)$ et $(1,1)$.

3)a)$\partial^2_{1,1} f(x,y) = 6x, \quad \partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = -3, \quad \partial^2_{2,2} f(x,y) = 6y.$

b)• La matrice hessienne de f en (0,0) est $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

λ est valeur propre de $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow (-\lambda) \times (-\lambda) - (-3) \times (-3) = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda^2 = 9$

$\Longleftrightarrow \lambda = 3$ ou $\lambda = -3$.

Les valeurs propres sont non nulles et de signes contraires. Donc f ne présente pas d'extrémum local en (0,0), c'est un point selle.

• La matrice hessienne de f en (1,1) est $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

λ est valeur propre de $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow (6-\lambda) \times (6-\lambda) - (-3) \times (-3) = 0$

$\Longleftrightarrow (6-\lambda)^2 = 9$

$\Longleftrightarrow 6 - \lambda = 3$ ou $6 - \lambda = -3$.

$\Longleftrightarrow \lambda = 3$ ou $\lambda = 9$.

Les valeurs propres sont strictement positives. Donc f possède un minimum local en (1,1) et $f(1,1) = -1$.

4)Supposons que f possède un minimum global en (1,1).
Alors, $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x,y) \geq f(1,1)$, soit $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x,y) \geq -1 \quad (*)$
Or, $f(0,-2) = -8 < -1$, ce qui contredit $(*)$.

Donc f n'a pas de minimum global en (1,1).

Partie II :

$\forall x \in \mathbf{R},\ g(x) = f(x,1) = x^3 - 3x + 1$.

5)Soit $n \geq 4$, un entier.

g est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme fonction polynomiale.
$\forall x \in \mathbf{R},\ g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

D'où le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$\forall x \leq 1,\ g(x) \leq 3 < n$ donc l'équation $g(x) = n$ n'a pas de solution sur $]-\infty, 1]$.

Regardons maintenant sur $[1, +\infty[$.
g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
Elle réalise donc une bijection de $[1, +\infty[$ sur $g\left([1, +\infty[\right) = [-1, +\infty[$.
$n \geq 4$ donc $n \in [-1, +\infty[$ admet un unique antécédent u_n par g.

Ainsi, pour tout entier $n \geq 4$, l'équation $g(x) = n$ possède une unique solution $u_n \in [1, +\infty[$.

6)a)h^{-1} a même variation que h, elle est donc strictement croissante sur $[-1, +\infty[$.

x	-1		$+\infty$
$h^{-1}(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

b)Par construction, on a : $\forall n \geq 4,\ g(u_n) = n$.
Comme $u_n \in [1, +\infty[$, on a $g(u_n) = h(u_n)$ d'où $h(u_n) = n$, puis $u_n = h^{-1}(n)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} h^{-1}(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

c)$\forall n \geq 4,\ g(u_n) = n \Longleftrightarrow u_n^3 - 3u_n + 1 = n \Longleftrightarrow u_n^3 \left(1 - \dfrac{3}{u_n^2} + \dfrac{1}{u_n^3}\right) = n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{3}{u_n^2} + \dfrac{1}{u_n^3}\right) = 1$.

Cela entraîne que $u_n^3 \underset{+\infty}{\sim} n$, puis $\left(u_n^3\right)^{1/3} \underset{+\infty}{\sim} n^{1/3}$, c'est-à-dire $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^{1/3}$.

Problème (edhec 2015)

Partie I

1)a)Pour tout $t \in [0, x]$, on a :

$0 \leq t^2 \leq x^2$ par croissance de la fonction carrée sur $\mathbf{R}_+$,

Donc $-x^2 \leq -t^2 \leq 0$, puis $1 - x^2 \leq 1 - t^2 \leq 1$.

D'où, $0 \leq \dfrac{1}{1-t^2} \leq \dfrac{1}{1-x^2}$.

Puis, en multipliant membre à membre par $t^m \geq 0$:

$0 \leq \dfrac{t^m}{1-t^2} \leq \dfrac{t^m}{1-x^2}$.

En intégrant ces inégalités entre les bornes croissantes 0 et x, on a :

$0 \leq \displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \leq \int_0^x \frac{t^m}{1-x^2} dt \quad (1)$

Et $\displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-x^2} dt = \frac{1}{1-x^2} \int_0^x t^m dt = \frac{1}{1-x^2} \left[\frac{t^{m+1}}{m+1}\right]_0^x = \frac{1}{1-x^2} \times \frac{x^{m+1}}{m+1}$.

Comme $x < 1$, on a : $x^{m+1} < 1$ donc $\displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-x^2} dt \leq \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1} \quad (2)$

En recollant (1) et (2), on déduit :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \leq \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}.$$

b) $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1} = 0$.

D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt = 0$.

2)a)Pour tout réel $t \in [0, 1[$ et tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a :

$\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \sum_{j=0}^{k-1} \left(t^2\right)^j = \frac{1 - \left(t^2\right)^k}{1-t^2} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}$.

b)En intégrant l'inégalité précédente entre 0 et x, on a :

$\displaystyle\int_0^x \left(\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}\right) dt = \int_0^x \frac{1-t^{2k}}{1-t^2} dt$.

Transformons chaque membre.

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}\right) dt &= \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^x t^{2j} dt \quad \text{par la relation de Chasles} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \left[\frac{t^{2j+1}}{2j+1}\right]_0^x \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}.
\end{aligned}$$

$$\int_0^x \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}dt = \int_0^x \left(\frac{1}{1-t^2} - \frac{t^{2k}}{1-t^2}\right)dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt.$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt.$

c)En appliquant la question 1)b) avec $m = 2k$, on a : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt = 0.$

On passe à la limite dans la question 2)b) quand $k \to +\infty$:

On a vu que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt = 0,$

De plus, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$ car l'intégrale ne dépend pas de k.

Par différence, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ existe, est finie et vaut $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt.$

La série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et sa somme vaut :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt.$$

d)
$$\begin{aligned}\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \left(\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt\right) \quad \text{d'après 2)b)} \\ &= \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt.\end{aligned}$$

Partie II

1)La première expérience est constituée d'un certain nombre d'épreuves (=lancer de pièce) successives, identiques et indépendantes.
A chaque épreuve, la probabilité de succès (=pile) vaut p.
N est le rang d'obtention du premier succès. Ainsi, $N \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.
Donc $N(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(N = k) = q^{k-1}p$.

2)a)Distinguons deux cas, selon la parité de m.

• m pair :
$m/2$ est un entier, donc floor(m/2)=m/2, puis 2*np.floor(m/2)=2*(m/2)=m.

• m impair (m=2k+1) :
On a : $m/2 = k + 1/2$ donc floor(m/2)=k, puis 2*np.floor(m/2)=2k$\neq$ m.

Donc 2*np.floor(m/2) renvoie m $\iff$ m est pair.

b)Programme :

```
p=float(input("entrer p"))
N=rd.geometric(p)
X=rd.randint(1,N+1)
if 2*np.floor(X/2)==X:
    print("perdu")
else:
    print("gagné")
```

3)a)Si l'événement $(N = 2j)$ est réalisé, l'urne contient $2j$ boules.
$k \geq j$ donc $2k + 1 \geq 2j + 1$. Or, aucune boule de l'urne ne porte un numéro supérieur ou égal à $2j + 1$.

Ainsi, $\forall k \geq j,\ P_{(N=2j)}(X = 2k + 1) = 0$.

b)C'est la même idée. On a : $k \geq j + 1$ donc $2k + 1 \geq 2j + 3 > 2j + 1$.

Donc $\forall k \geq j + 1,\ P_{(N=2j+1)}(X = 2k + 1) = 0$.

c)Cette fois-ci, on a : $k \leq j - 1$ donc $2k + 1 \leq 2j - 1$.

Supposons l'événement $(N = 2j)$ réalisé.
L'urne contient alors les boules numérotées 1, ..., $2j$.
Parmi elles, se trouve la boule numérotée $2k+1$ qui a 1 chance sur $2j$ d'être tirée.

Donc $\forall k \in [\![0, j - 1]\!],\ P_{(N=2j)}(X = 2k + 1) = \dfrac{1}{2j}$.

d)De même, on a : $k \leq j$ donc $2k + 1 \leq 2j + 1$.

Supposons l'événement $(N = 2j + 1)$ réalisé.
L'urne contient alors les boules numérotées 1, ..., $2j$, $2j + 1$.
Parmi elles, se trouve la boule numérotée $2k + 1$ qui a 1 chance sur $2j + 1$ d'être tirée.

Donc $\forall k \in [\![0, j]\!],\ P_{(N=2j+1)}(X = 2k + 1) = \dfrac{1}{2j + 1}$.

4)a)• Comme $N(\Omega) = \mathbf{N}^*$, la famille d'événements $(N = n)_{n\geq 1}$ est un système complet. La formule des probabilités totales donne alors :

$$\begin{aligned} P(X = 2k + 1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P\big((X = 2k + 1) \cap (N = n)\big) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n)P_{(N=n)}(X = 2k + 1) \end{aligned}$$

• On va scinder cette somme en deux :
− la première somme comporte les indices n pairs ($n = 2j$ avec $j \geq 1$),
− la deuxième somme comporte les indices n impairs ($n = 2j + 1$ avec $j \geq 0$).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n)P_{(N=n)}(X = 2k + 1)$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty} P(N = 2j)P_{(N=2j)}(X = 2k+1) + \sum_{j=0}^{+\infty} P(N = 2j+1)P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1).$$

Compte tenu des questions 3)a) et 3)c), on a :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} P(N=2j)P_{(N=2j)}(X=2k+1)$$
$$=\sum_{j=1}^{k} P(N=2j)\underbrace{P_{(N=2j)}(X=2k+1)}_{=0 \text{ car } k\geq j}+\sum_{j=k+1}^{+\infty} P(N=2j)\underbrace{P_{(N=2j)}(X=2k+1)}_{=\frac{1}{2j} \text{ car } k\leq j-1}$$

Compte tenu des questions 3)b) et 3)d), on a :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P(N=2j+1)P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)$$
$$=\sum_{j=0}^{k-1} P(N=2j+1)\underbrace{P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)}_{=0 \text{ car } k\geq j+1}+\sum_{j=k}^{+\infty} P(N=2j+1)\underbrace{P_{(N=2j+1)}(X=2k+1)}_{=\frac{1}{2j+1} \text{ car } k\leq j}$$

On déduit pour tout $k\in\mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}P(X=2k+1)&=\sum_{j=k+1}^{+\infty} P(N=2j)\times\frac{1}{2j}+\sum_{j=k}^{+\infty}P(N=2j+1)\times\frac{1}{2j+1}\\&=\sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{2j-1}p\times\frac{1}{2j}+\sum_{j=k}^{+\infty}q^{2j}p\times\frac{1}{2j+1}\\&=\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{q^{2j}}{2j}\times\frac{p}{q}+\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{q^{2j+1}}{2j+1}\times\frac{p}{q}\\&=\frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{q^{2j}}{2j}+\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right).\end{aligned}$$

b)On poursuit le calcul en utilisant la question 2)d) avec $x\to q$:

$$\begin{aligned}P(X=2k+1)&=\frac{p}{q}\left(\int_0^q\frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt+\int_0^q\frac{t^{2k}}{1-t^2}dt\right)\\&=\frac{p}{q}\int_0^q\left(\frac{t^{2k+1}}{1-t^2}+\frac{t^{2k}}{1-t^2}\right)dt\quad\text{par linéarité}\\&=\frac{p}{q}\int_0^q\frac{t^{2k+1}+t^{2k}}{1-t^2}dt\\&=\frac{p}{q}\int_0^q\frac{t^{2k}(t+1)}{(1-t)(1+t)}dt\\&=\frac{p}{q}\int_0^q\frac{t^{2k}}{1-t}dt.\end{aligned}$$

5)a)Pour tout $t\in[0,q]$, on a :

- $1\leq\ 1+t\leq 1+q$, puis $0\leq\dfrac{1}{1+t}\leq 1\qquad(1)$
- $-q\leq -t\leq 0$, puis $1-q\leq 1-t\leq 1$.

On déduit : $(1-q)^2 \leq (1-t)^2 \leq 1$, puis $0 \leq \dfrac{1}{(1-t)^2} \leq \dfrac{1}{(1-q)^2}$ (2)

En multipliant membre à membre (1) et (2), on a :

$0 \leq \dfrac{1}{(1-t)^2(1+t)} \leq \dfrac{1}{(1-q)^2}$.

Puis, en multipliant membre à membre par $t^{2n+2} \geq 0$:

$0 \leq \dfrac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} \leq \dfrac{t^{2n+2}}{(1-q)^2}$.

En intégrant entre les bornes croissantes 0 et q, on a :

$0 \leq \displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt \leq \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-q)^2}dt$ (3)

Or, $\displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-q)^2}dt = \frac{1}{(1-q)^2}\int_0^q t^{2n+2}dt = \frac{1}{(1-q)^2}\left[\frac{t^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^q = \frac{q^{2n+3}}{(1-q)^2(2n+3)}$

Comme $q \leq 1$, on a : $q^{2n+3} \leq 1$, puis $\dfrac{q^{2n+3}}{(1-q)^2(2n+3)} \leq \dfrac{1}{(1-q)^2(2n+3)}$.

On a donc $\displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-q)^2}dt \leq \frac{1}{(1-q)^2(2n+3)}$ (4)

En recollant (3) et (4) : $0 \leq \displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt \leq \frac{1}{(1-q)^2(2n+3)}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1-q)^2(2n+3)} = 0$.

D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt = 0$.

5)b)De la question 4)b), on déduit en sommant :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} P(X=2k+1) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt \\
&= \frac{p}{q}\sum_{k=0}^{n}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt \\
&= \frac{p}{q}\int_0^q \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{2k}}{1-t}\right)dt \\
&= \frac{p}{q}\int_0^q \left(\frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{n}\left(t^2\right)^k\right)dt \\
&= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{1-t}\times\frac{1-\left(t^2\right)^{n+1}}{1-t^2}dt \\
&= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)(1-t^2)}dt \\
&= \frac{p}{q}\int_0^q \left(\frac{1}{(1-t)(1-t^2)} - \frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1-t^2)}\right)dt
\end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale et en remarquant que $(1-t)(1-t^2) = (1-t)^2(1+t)$, on conclut :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = 2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)$$

c)A est réalisé si et seulement si X prend une valeur impaire, c'est-à-dire si et seulement si l'un des événements $(X = 2k+1)$ est réalisé.

Donc $A = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty}(X = 2k+1)$.

Les événements $(X = 2k+1)_{k\geq 0}$ étant incompatibles deux à deux, on a :

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k+1) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} P(X = 2k+1) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{p}{q}\left(\underbrace{\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt}_{\text{constante}} - \underbrace{\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt}_{\text{tend vers 0 par 5)a)}}\right) \\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt. \end{aligned}$$

6)a)Pour tout réel $t \in \mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2} &= \frac{a(1-t)(1+t) + b(1-t)^2 + c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)} \\ &= \frac{a(1-t^2) + b(1-2t+t^2) + c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)} \\ &= \frac{a - at^2 + b - 2bt + bt^2 + c + ct}{(1-t)^2(1+t)} \\ &= \frac{(-a+b)t^2 + (-2b+c)t + (a+b+c)}{(1-t)^2(1+t)}. \end{aligned}$$

Pour tout réel $t \in \mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$, on a donc

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

$$\iff (-a+b)t^2 + (-2b+c)t + (a+b+c) = 1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} -a+b=0 \\ -2b+c=0 \\ a+b+c=1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} a=b \\ c=2b \\ b+b+2b=1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} a = 1/4 \\ c = 1/2 \\ b = 1/4 \end{array} \right.$$

Donc $\forall t \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\dfrac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \dfrac{1/4}{1-t} + \dfrac{1/4}{1+t} + \dfrac{1/2}{(1-t)^2}$.

b)Des questions 5)c) et 6)a), on déduit :

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{p}{q} \int_0^q \left(\frac{1/4}{1-t} + \frac{1/4}{1+t} + \frac{1/2}{(1-t)^2} \right) dt \\
&= \frac{p}{q} \left(\frac{1}{4} \big[-\ln(1-t) \big]_0^q + \frac{1}{4} \big[\ln(1+t) \big]_0^q + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-t} \right]_0^q \right) \\
&= \frac{p}{q} \left(-\frac{1}{4} \ln(1-q) + \frac{1}{4} \ln(1+q) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-q} - 1 \right] \right) \\
&= \frac{p}{q} \left(\frac{1}{4} \ln\left(\frac{1+q}{1-q} \right) + \frac{1}{2} \times \frac{1-(1-q)}{1-q} \right) \\
&= \frac{1-q}{q} \left(\frac{1}{4} \ln\left(\frac{1+q}{1-q} \right) + \frac{q}{2(1-q)} \right) \\
&= \frac{1-q}{4q} \ln\left(\frac{1+q}{1-q} \right) + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

c)Comme $q > 0$, on a : $\dfrac{1+q}{1-q} > 1$ donc $\ln\left(\dfrac{1+q}{1-q}\right) > 0$.

Et $\dfrac{1-q}{4q} > 0$.

On conclut que $P(A) > \dfrac{1}{2}$.