DS3 cubes ecg2 maths appliquées - 18/12/2024

Problème

Partie A (rotations)

On note $\mathscr{R}$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont des réels quelconques tels que $a^2+b^2=1$.

1)Montrer que $\forall (M,N)\in\mathscr{R}^2,\ MN\in\mathscr{R}$.

2)Soit M une matrice quelconque de $\mathscr{R}$.

a)Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbf{N},\ M^n\in\mathscr{R}$.

b)Justifier que tous les coefficients de M appartiennent à $[-1,1]$.

c)Justifier que M est inversible et vérifier que $M^{-1}\in\mathscr{R}$.

3)$\mathscr{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$?

Partie B (nombre plastique φ)

4)a)Montrer que l'équation $x^3-x-1=0$ admet une unique solution φ.
Etablir que $1<\varphi<2$.

b)Justifier les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \varphi^3=\varphi+1 \\[2ex] 1-\varphi^2=-\dfrac{1}{\varphi} \\[2ex] \varphi^5=\varphi^2+\varphi+1 \\[2ex] \varphi^{-4}=\varphi-1 \end{cases}$$

Dans la suite du problème, on considère les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ suivantes :

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{\varphi} & -\varphi \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -\dfrac{\varphi}{2} & -\sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4\varphi}} \\ \sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4\varphi}} & -\dfrac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \text{ et } P=\begin{pmatrix} \dfrac{\varphi}{2} & 1 \\ \sqrt{\dfrac{3-\varphi}{4\varphi}} & 0 \end{pmatrix}.$$

5)Montrer que B ne possède aucune valeur propre.

6)a) Justifier que P est inversible, puis montrer que $CP=PB$.

b)Etablir que $\forall n\in\mathbf{N},\ B^n=P^{-1}C^nP$.

7)On pose $B^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$.

a)A l'aide des questions précédentes, montrer qu'il existe des constantes réelles m et M telles que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \frac{m}{\left(\sqrt{\varphi}\right)^n} \leq a_n \leq \frac{M}{\left(\sqrt{\varphi}\right)^n}.$$

b)En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Préciser de même $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n$.

Partie C (calcul d'une puissance de matrice)

Dans cette partie, on considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8)a)Vérifier que $A^3 = A + I$.

b)En déduire l'unique valeur propre de A et une base de son sous-espace propre associé.

c)A est-elle diagonalisable ?

9)Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice A dans la base canonique.

Soient les vecteurs u, v et w de $\mathbf{R}^3$ donnés par :

$$u = \left(1, \varphi, \varphi^2\right),\ v = \left(-\varphi^2, 1, 0\right) \text{ et } w = (-\varphi, 0, 1)\,.$$

a)Montrer que $\mathscr{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbf{R}^3$, puis écrire la matrice de passage Q de la base canonique à la base $\mathscr{C}$.

b)Calculer les vecteurs $\Phi(u)$, $\Phi(v)$ et $\Phi(w)$, puis écrire chacun d'entre eux comme combinaison linéaire de u, v et w.

c)Sans chercher à calculer Q^{-1}, justifier l'égalité suivante :

$$A = Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1}.$$

d)Conclure que $\forall n \in \mathbf{N},\ A^n = Q \left(\begin{array}{c|cc} \varphi^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B^n}} \\ 0 & & \end{array}\right) Q^{-1}$.

Partie D (suite de Padovan)

Dans cette partie, on étudie la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ formée d'entiers strictement positifs, définie par la donnée de ses trois premiers termes $U_0 = 1$, $U_1 = 1$ et $U_2 = 1$, ainsi que par l'égalité :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+3} = U_{n+1} + U_n.$$

On considère la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbf{N},\ X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{pmatrix}$.

10)a)Calculer U_3, U_4, U_5, U_6 et U_7.

b)Montrer que $\forall n \geq 2,\ U_{n+3} - U_{n+2} = U_{n-2}$.

c)En déduire le sens de variation de $(U_n)_{n\geq 0}$ et préciser sa limite.

11)a)Préciser X_0. Vérifier que $\forall n \in \mathbf{N},\ X_{n+1} = AX_n$.

b)Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ X_n = A^n X_0$.

12)On admet que la première ligne de Q^{-1} est : $\left(\dfrac{1}{2\varphi+3}, \dfrac{\varphi^2}{2\varphi+3}, \dfrac{\varphi}{2\varphi+3}\right)$.

A l'aide des questions 7), 9)d) et 11)b), montrer qu'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ tendant vers 0 quand $n \to +\infty$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ U_n = \frac{\varphi^5}{2\varphi+3} \times \varphi^n + \epsilon_n.$$

Partie E (étude d'une série)

13)Donner un équivalent simple de U_n, puis déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$.

14)Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{U_n}$ est convergente.

15)A l'aide de la question 10)b), montrer que $\forall n \geq 4,\ U_{n+1} = 2 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-4} U_k$.

16)a)Montrer par récurrence sur n que $\forall n \geq 4, \forall k \in [\![0,n]\!]\ U_k \geq \varphi^{k-4}$.

b)En déduire que $\forall n \in \mathbf{N},\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{U_k} \leq \frac{1}{\varphi^{n-8}}$.

17)Soit $r \in \mathbf{N}$.

a)Montrer que $\dfrac{1}{\varphi^{n-8}} \leq 10^{-r} \iff n \geq 8 + \dfrac{r\ln 10}{\ln\varphi}$.

b)Supposons qu'on dispose d'un encadrement de φ entre deux réels φ_{min} et φ_{max} du type : $\varphi_{min} \leq \varphi \leq \varphi_{max}$.

Posons $p = 1 + \left\lfloor 8 + \dfrac{r\ln 10}{\ln(\varphi_{min})} \right\rfloor$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} U_k$ est une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{U_k}$ à 10^{-r} près.

Partie F (informatique)

18)On pose $f : x \mapsto x^3 - x - 1$.
Ecrire une fonction python d'en-tête `def f(x):` prenant comme paramètre un réel x et renvoyant la valeur de $f(x)$.

19)Compléter la fonction ci-dessous d'en-tête `def plastique(alpha):` prenant comme paramètre un entier alpha et renvoyant une valeur approchée de φ à $10^{-\text{alpha}}$ près.

```
def plastique(alpha):
    a=1
    b=2
    while b-a>......... :
        c=(a+b)/2
        if f(c)<0:
            ..... =c
        if f(c)>0:
            ..... =c
    return c
```

20)Compléter la fonction ci-dessous d'en-tête `def padovan(n):` prenant comme paramètre un entier naturel n et renvoyant la valeur de U_n.

```
def padovan(n):
    liste=[1,1,1]
    for i in range(3,....):
        liste.append(......................)
    return liste ....
```

21)En exécutant la fonction `plastique` en prenant alpha=2, on obtient : $1,32 \leq \varphi \leq 1,33$.

Ecrire une fonction d'en-tête `serie(r)` prenant comme paramètre un entier r et renvoyant une valeur approchée de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{U_k}$ à 10^{-r} près.

Indication :
Utiliser la question 17).
On rappelle que la fonction `floor(x)` associe la partie entière de x.

Exercice

On dispose de trois pièces :

− une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\dfrac{1}{2}$

− une pièce numérotée 1, donnant "face" à coup sûr,

− une pièce numérotée 2, donnant "pile" à coup sûr.

On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.

Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».

Pour tout $k \in \mathbb{N}*$, on note P_k l'événement : « on obtient "pile" au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.

On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y , égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) Déterminer $P(X = 1)$.

   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, P(X = n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   (c) En déduire la valeur de $P(X = 0)$

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer .

3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance. Déduire que X possède une variance et que $V(X) = \dfrac{4}{3}$.

4. Justifier que Y suit la même loi que X.

5. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X = 1] \cap [Y = j]) = P([Y = j])$.

   (b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X = i] \cap [Y = 1]) = P([X = i])$.

6. Loi de $X + Y$.

   (a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.

   (b) Montrer que $P(X + Y = 1) = \dfrac{2}{3}$.

   (c) Justifier que , pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$(X + Y = n) = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$$

   (d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$P(X + Y = n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

7. Informatique. On suppose importé le module `numpy.random` d'alias `rd`.
   On rappelle que la commande `rd.randint(a,b)` renvoie de façon équiprobable un entier aléatoire compris entre a et $b - 1$.
   On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0 .

   (a) Compléter le script `Python` suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece=rd.randint(...,...)
x=1
if piece==0:
    lancer=rd.randint(...,...)
    while lancer==0:
        lancer=......
        x=.....
if piece==1:
    x=.....
print(x)
```

   (b) Justifier que le cas de la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.