Chapitre 6 : compléments sur les suites

I)Suites récurrentes du type $U_{n+1} = f(U_n)$

Déf : soit f une fonction. Une suite récurrente du type $U_{n+1} = f(U_n)$ est une suite dont le premier terme U_0 est connu et définie par l'égalité $\forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+1} = f(U_n)$.

$$U_0 \xrightarrow{f} U_1 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} U_n \xrightarrow{f} U_{n+1} \xrightarrow{f} \dots$$

Remarque
Avec ce type de suite, on ne sait pas calculer U_n en fonction de n (sauf si f est affine car c'est alors une suite arithmético-géométrique).

Déf : on appelle point fixe de f, tout nombre réel solution de l'équation $f(x) = x$.

Théorème 1 (théorème du point fixe)
Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite définie par $\forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+1} = f(U_n)$.
Si $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l et si f est continue en l, alors l est un point fixe de f.

Remarque
Ce théorème ne permet pas de prouver que la suite converge.

<u>Exercice 1</u>
Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$.
1)Etudier les variations de $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$ sur $[-2, +\infty[$.
2)Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n$ existe et $0 \leq U_n \leq 2$.
3)Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+1} \geq U_n$.
4)Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.
5)Tracer $\mathscr{C}_f$ puis représenter les termes U_0, U_1, U_2.

II)Suites équivalentes

Déf : on dit que les suites $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont équivalentes (en $+\infty$) si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = 1$ ou si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{V_n}{U_n} = 1$. On note alors : $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$ ou $V_n \underset{+\infty}{\sim} U_n$.

Remarque
Deux suites $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont équivalentes s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 1 et $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que $\forall n \geq n_0,\ U_n = \alpha_n V_n$.

Propriété 1
Si $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

Remarque
Réciproque fausse : exemple $U_n = n$ et $V_n = n^2$.

Propriété 2
Soit l un réel non-nul. Alors, $U_n \underset{+\infty}{\sim} l \iff \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.

Propriété 3
Toute suite polynômiale est équivalente en $+\infty$ à son monôme de plus haut degré.

Propriété 4 (opérations sur les équivalents)
Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des suites et soit α un réel.
1)Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ et si $c_n \underset{+\infty}{\sim} d_n$, alors on a : $a_n c_n \underset{+\infty}{\sim} b_n d_n$ et $\dfrac{a_n}{c_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{b_n}{d_n}$.
2)Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, alors on a : $(a_n)^\alpha \underset{+\infty}{\sim} (b_n)^\alpha$.

> Remarque
> On n'a pas le droit de faire une somme, une différence d'équivalents ou d'appliquer une fonction de part et d'autre d'un équivalent (sauf si c'est la fonction puissance).

<u>Exercice 2</u>
Déterminer un équivalent simple de $U_n = \dfrac{(2n^3 - n + 1)^4}{(-3n^4 + n^2 - 1)^5}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

<u>Exercice 3</u>
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

III)Suite négligeable devant une autre

Déf : on dit que la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est négligeable devant la suite $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (en $+\infty$) si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = 0$. On note alors : $U_n \underset{+\infty}{=} o(V_n)$.

> Remarque
> $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est négligeable devant $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 0 et $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que $\forall n \geq n_0,\ U_n = \epsilon_n V_n$.

Propriété 5
$U_n \underset{+\infty}{=} o(1) \iff \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

Propriété 6
Si $V_n \underset{+\infty}{=} o(U_n)$, alors $U_n + V_n \underset{+\infty}{\sim} U_n$.

Théorème 2 (rappel fondamental)
1)Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
2)Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
3)Si $q < -1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas.

Théorème 3 (croissances comparées)
Quels que soit les réels $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$, quelquesoit le réel q, on a :
1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{(\ln n)^\beta} = +\infty$.
2)Pour tout $q > 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{q^n} = 0$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n^\alpha} = +\infty$.
3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{e^{\gamma n}} = 0$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\gamma n}}{n^\alpha} = +\infty$.
4)Pour tout $q \in]-1, 1[$: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha q^n = 0$.

<u>Exercice 4</u>
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2(\ln n)^3}{e^n}$.