TP5 Python (fonctions, suites, tracés)

Exercice 1

Compléter le programme ci-dessous de sorte qu'il affiche la courbe représentative de $x \mapsto x^2$ sur $[-3,3]$ en prenant 100 points uniformémént répartis entre -3 et 3.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
x = np.linspace(....,....,....)
y=.........
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

Exercice 2

Compléter le programme ci-dessous de sorte qu'il affiche la courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,4]$ en prenant des points uniformémént répartis entre 0 et 4 et espacés de 0,01.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
x = np.arange(....,....,....)
y=...............
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

Exercice 3

Expliciter la fonction f ci-dessous, puis compléter le programme de sorte à obtenir la courbe représentative de f sur $[0,5]$.

```
import numpy as np
def f(x):
    y=x
    for k in range(3):
        y=1/(1+y)
    return y
```

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3+u_n^2}$.

1)Etudier les variations sur $\mathbf{R}_+$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\sqrt{3+x^2}$.

2)Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

3)Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et préciser sa limite.

4)Compléter le programme suivant pour qu'il affiche le plus petit entier n à partir duquel $|u_n - 1| \leq 10^{-4}$.

```
import numpy as np
def f(x):
    y=0.5*np.sqrt(3+x**2)
    return y
u=.....
n=.....
while ..............:
    u=.....
    n=.....
print(.....)
```

Exercice 5

A l'aide de plot, écrire un programme qui trace l'octogone de sommets $(2,0)$, $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(0,2)$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-2,0)$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(0,-2)$ et $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

Exercice 6

1)Ecrire le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 en 0.

2)Ecrire un programme qui trace sur un même dessin les courbes représentatives sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ des fonctions $x\mapsto \ln(1+x)$ et $x\mapsto x-\frac{1}{2}x^2$.
Que constatez-vous ?

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $]0,1]$ par $f(x)=x+\ln x$.

1)Montrer que f s'annule une et une seule fois sur $]0,1]$ en un réel α.

2)Ecrire un programme qui trace la courbe représentative de f sur $]1/100,1]$.
Que vaut α environ ?

3)Le programme ci-dessous vise à déterminer par dichotomie une valeur approchée de α à 10^{-4} près et à l'afficher. Le compléter.

```
import numpy as np
def f(x):
    y=x+np.log(x)
    return y
a=0
b=1
while b-a ..........:
    c=(a+b)/2
    if f(c)<0:
        .....
    if f(c)>0:
        .....
print(.....)
```

Exercice 8 (extrait hec 2015)

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = e^{-e^{-x}}$.

1)Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]0,1[$.

2)Que fait le programme ci-dessous ?

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
x=np.linspace(-4,4,100)
y=np.exp(-np.exp(-x))
plt.plot(x,y)
plt.plot(y,x)
plt.plot(x,x)
plt.show()
```

3)Expliciter la bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 9

Soit $a \in [0,4]$ un paramètre réel.
On appelle *suite logistique* la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la donnée du réel $u_0 \in [0,1]$ et par l'égalité :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = au_n(1-u_n).$$

1)Dresser le tableau de variations sur $[0,1]$ de $f : x \mapsto ax(1-x)$, puis déterminer ses points fixes.

2)Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in [0,1]$.

3)Ecrire une fonction $u(a, u0, n)$ qui prend en entrée le paramètre a, le premier terme $u0$ et un entier n, et qui renvoie en sortie la valeur de u_n.

4)On suppose la fonction u précédente correctement programmée.
Compléter la fonction ci-dessous de sorte qu'elle affiche en abscisses les entiers de 0 à n et en ordonnées les termes de la suite de u_0 jusqu'à u_n.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def dessiner(a,u0,n):
    x=np.arange(...,...,...)
    y=[.........for k in .....]
    plt.plot(x,y,"+")
    plt.show()
```

5)Tester le programme précédent dans chacun des cas suivants. Interprétez.

- $a = 0.5$, $u_0 = 0.6$ et $n = 20$
- $a = 1.5$, $u_0 = 0.6$ et $n = 20$
- $a = 2.2$, $u_0 = 0.8$ et $n = 20$
- $a = 3.7$, $u_0 = 0.6$ et $n = 20$