Correction ESSEC II 2010

Partie I : généralités sur la loi exponentielle

1)a)$X \hookrightarrow \mathscr{E}(\mu)$ donc $E(X) = \dfrac{1}{\mu}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\mu^2}$.

1)b)• Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_\mu(x)\mathrm{d}x$ converge absolument.

On a $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |x^n f_\mu(x)|\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x$ qui converge.

Il reste à établir la convergence de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} |x^n f_\mu(x)|\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x^n \mu e^{-\mu x}\mathrm{d}x$.

On a : $x^n \mu e^{-\mu x} \underset{+\infty}{=} o(1/x^2)$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{n+2}e^{-\mu x} = 0$ par croissances comparées.

Comme $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ converge, on déduit par le critère de négligeabilité sur les fonctions positives que $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x^n \mu e^{-\mu x}\mathrm{d}x$ converge.

Enfin, $\displaystyle\int_{0}^{1} x^n \mu e^{-\mu x}\mathrm{d}x$ converge car la fonction $x \mapsto x^n \mu e^{-\mu x}$ est continue sur $[0, 1]$.

Par Chasles, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^n \mu e^{-\mu x}\mathrm{d}x$ converge.

On conclut que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x^n f_\mu(x)|\mathrm{d}x$ converge. Donc X^n admet une espérance.

• Soit $A \geq 1$ un réel. Effectuons une IPP sur $\displaystyle\int_{0}^{A} x^{n+1} \mu e^{-\mu x}\mathrm{d}x$.

On pose $u(x) = x^{n+1}$ $\qquad v'(x) = \mu e^{-\mu x}$

$u'(x) = (n+1)x^n \qquad v(x) = -e^{-\mu x}$.

u et v sont de classe C^1 sur $[1, A]$. L'IPP est licite et donne :

$$\int_{0}^{A} x^{n+1} \mu e^{-\mu x}\mathrm{d}x = [-x^{n+1}e^{-\mu x}]_0^A - \int_{0}^{A} -(n+1)x^n e^{-\mu x}\mathrm{d}x$$
$$= -A^{n+1}e^{-\mu A} + \frac{n+1}{\mu}\int_{0}^{A} x^n \mu e^{-\mu x}\mathrm{d}x(*).$$

On a $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -A^{n+1}e^{-\mu A} = 0$ par croissances comparées.

En passant à la limite dans (*) quand $A \to +\infty$, on obtient :

$$\int_{0}^{+\infty} x^{n+1} \mu e^{-\mu x}\mathrm{d}x = 0 + \frac{n+1}{\mu}\int_{0}^{+\infty} x^n \mu e^{-\mu x}\mathrm{d}x.$$

C'est-à-dire : $E(X^{n+1}) = \dfrac{n+1}{\mu}E(X^n)$.

1)c)On a pour tout entier $k \geq 1$: $E(X^{k+1}) = \dfrac{k+1}{\mu}E(X^k)$.

En multipliant ces égalités pour k allant de 1 à $n-1$, on tire :

$\prod_{k=1}^{n-1} E(X^{k+1}) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{\mu} E(X^k)$, soit :

$E(X^2)...E(X^{n-1})E(X^n) = \frac{n!}{\mu^{n-1}} E(X)E(X^2)...E(X^{n-1})$

Par télescopage, on déduit :

$E(X^n) = \frac{n!}{\mu^{n-1}} E(X) = \frac{n!}{\mu^{n-1}} \frac{1}{\mu} = \frac{n!}{\mu^n}$.

1)d)La formule de Koenig donne :

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2!}{\mu^2} - \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 = \frac{1}{\mu^2}$.

On retrouve la variance d'une loi exponentielle.

2)a)• Pour tout $x \geq 0$, on a :

$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x) = 1 - (1 - e^{-\mu x}) = e^{-\mu x} > 0$.

• Pour tous réels $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
P_{(X>x)}(X > x + y) &= \frac{P(X > x \cap X > x + y)}{P(X > x)} \\
&= \frac{P(X > x + y)}{P(X > x)} \ \mathit{car}\ y \geq 0 \\
&= \frac{1 - P(X \leq x + y)}{1 - P(X \leq x)} \\
&= \frac{1 - F_X(x + y)}{1 - F_X(x)} \\
&= \frac{1 - (1 - e^{-\mu(x+y)})}{1 - (1 - e^{-\mu x})} \\
&= e^{-\mu y} \\
&= 1 - F_X(y) \\
&= P(X > y).
\end{aligned}$$

2)b)i)Pour tout $x \geq 0$, on a $R(x) = P(X > x) = \int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

f est continue et strictement positive sur $[x, +\infty[$ donc $R(x) > 0$.

2)b)ii)F_X est dérivable sur $[0, +\infty[$ donc $R(x) = 1 - F_X(x)$ l'est aussi.
De plus, $R'(x) = -F_X'(x) = -f(x)$.

On sait par hypothèse que $P_{(X>x)}(X > x + y) = P(X > y)$.

Cela se traduit par : $\frac{P(X > x + y)}{P(X > x)} = P(X > y)$, c'est-à-dire :

$R(x + y) = R(x)R(y)$ (*)

En fixant x et en dérivant (*) par rapport à y, on obtient :

$R'(x + y) = R(x)R'(y)$.

Puis, en prenant $y = 0$: $R'(x) = R(x)R'(0) = -f(0)R(x) = -\mu R(x)$.

On a donc pour tout $x \geq 0$, $R'(x) + \mu R(x) = 0$.

2)b)iii)R est solution de l'équation différentielle : $y' + \mu y = 0$.
Elle est de la forme $R : x \mapsto \beta e^{-\mu x}$.
Or, $R(0) = P(X > 0) = 1$ car X est positive. Cela entraîne que $\beta = 1$.
Donc $\forall x \geq 0,\ R(x) = e^{-\mu x}$.
On déduit que $\forall x \geq 0,\ F_X(x) = 1 - R(x) = 1 - e^{-\mu x}$.
Enfin, on a $\forall x < 0,\ F_X(x) = P(X \leq x) = 0$ car X est positive.
Ainsi, $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
Donc $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\mu)$.
3)a)• Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P\big(max(X_1, X_2) \leq x\big) \\ &= P\big((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x)\big) \\ &= P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \quad \text{par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\ &= F_{X_1}(x)F_{X_2}(x). \end{aligned}$$

Or, $F_{X_1(x)} = \begin{cases} 1 - e^{-\mu_1 x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $F_{X_2(x)} = \begin{cases} 1 - e^{-\mu_2 x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
Par produit, on déduit :

$$F_Y(x) = \begin{cases} (1 - e^{-\mu_1 x})(1 - e^{-\mu_2 x}) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

• F_Y est continue sur $[0, +\infty[$ comme produit, différence et composée de fonctions continues. F_Y est continue sur $]-\infty, 0[$ comme fonction nulle.
Donc F_Y est continue sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en 0.
De plus, F_Y est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ comme produit, différence et composée de fonctions continues. F_Y est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ comme fonction nulle.
Y est donc une variable aléatoire à densité.
Une densité f_Y de Y s'obtient en dérivant F_Y aux points où elle est dérivable et en prenant une valeur arbitraire positive ou nulle ailleurs.
$\forall x > 0,\ f_Y(x) = F_Y'(x) = \mu_1 e^{-\mu_1 x}(1 - e^{-\mu_2 x}) + (1 - e^{-\mu_1 x})\mu_2 e^{-\mu_2 x}$.
On peut prendre par exemple $f_Y(0) = 0$.
On a finalement :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \mu_1 e^{-\mu_1 x}(1 - e^{-\mu_2 x}) + (1 - e^{-\mu_1 x})\mu_2 e^{-\mu_2 x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

3)b)• Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(Z \leq x) \\ &= 1 - P(Z > x) \\ &= 1 - P\big(min(X_1, X_2) > x\big) \\ &= 1 - P\big((X_1 > x) \cap (X_2 > x)\big) \\ &= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x) \quad \text{par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\ &= 1 - \big(1 - P(X_1 \leq x)\big)\big(1 - P(X_2 \leq x)\big) \\ &= 1 - \big(1 - F_{X_1}(x)\big)\big(1 - F_{X_2}(x)\big). \end{aligned}$$

En réutilisant l'expression de $F_{X_1}(x)$ et $F_{X_2}(x)$, on déduit :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \big(1-(1-e^{-\mu_1 x})\big)\big(1-(1-e^{-\mu_2 x})\big) & \text{si } x \geq 0 \\ 1-(1-0)\times(1-0) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Finalement, on obtient après regroupement des exponentielles :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(\mu_1+\mu_2)x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Donc $Z \hookrightarrow \mathscr{E}(\mu_1+\mu_2)$.

Partie II : fiabilité

1)Soient $t \geq 0$ et $h > 0$.

$$\begin{aligned} P(t \leq T \leq t+h) &= F_T(t+h) - F_T(t) \\ &= \big(1 - R_T(t+h)\big) - \big(1-R_T(t)\big) \\ &= R_T(t) - R_T(t+h) \end{aligned}$$

2) $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{P(t \leq T \leq t+h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{F_T(t+h)-F_T(t)}{h} = F_T'(t) = f_T(t).$

En effet, par hypothèse f_T est continue sur $\mathbf{R}_+$ donc en $t \geq 0$, ce qui assure la dérivabilité de F_T en t.

3)a)F_T est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ par énoncé. Donc R_T l'est également.
$\forall t > 0,\ R_T'(t) = -F_T'(t) = -f_T(t) < 0$ par énoncé.
Donc R_T est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et même sur $[0,+\infty[$, étant continue en 0.
Par les propriétés d'une fonction de répartition, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F_T(t) = 1$.
Donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} R_T(t) = 0$.
On déduit : $\forall t \geq 0,\ R_T(t) > 0$.

3)b)On a vu dans la question 3)a) que R_T est dérivable sur $\mathbf{R}_+$. Par inverse et composée de fonction dérivable, φ est dérivable sur $\mathbf{R}_+$.

$\forall t \geq 0,\ \varphi'(t) = \dfrac{\left(\frac{1}{R_T(t)}\right)'}{\frac{1}{R_T(t)}} = \dfrac{-\frac{R_T'(t)}{R_T(t)^2}}{\frac{1}{R_T(t)}} = -\dfrac{R_T'(t)}{R_T(t)} = \dfrac{f_T(t)}{R_T(t)} = \lambda(t).$

3)c)Soit $t \geq 0$. En intégrant l'égalité précédente entre 0 et t, on a :
$\displaystyle\int_0^t \varphi'(t)dt = \int_0^t \lambda(t)dt.$

Or, $\displaystyle\int_0^t \varphi'(t)dt = [\varphi(t)]_0^t = \varphi(t) - \varphi(0) = \ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right) - \ln\left(\frac{1}{R_T(0)}\right)$
avec $R_T(0) = P(T \geq 0) = 1$ car T est positive.

On déduit : $\displaystyle\ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right) = \int_0^t \lambda(t)dt$, puis $\displaystyle -\ln(R_T(t)) = \int_0^t \lambda(t)dt.$

En multipliant par -1 et en composant par l'exponentielle, on trouve :

$$R_T(t) = exp\left(-\int_0^t \lambda(t)dt\right).$$

4)a)v est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ comme produit de fonctions dérivables.

$\forall t \geq 0,\ v'(t) = R_Z(t) + tR'_Z(t)$ avec $R'_Z(t) = -g(t)$ en reprenant l'argument du début de la question 3)a).

On déduit immédiatement :

$$\forall t \geq 0,\ tg(t) = R_Z(t) - v'(t).$$

4)b)Soit t un réel positif. g étant positive, on a pour tout $u \geq t$:

$$0 \leq tg(u) \leq ug(u) \quad (*)$$

$\displaystyle\int_t^{+\infty} tg(u)du$ converge car de même nature que $\displaystyle\int_t^{+\infty} g(u)du$.

Par hypothèse, Z admet une espérance et Z est positive.

Ceci entraîne que $\displaystyle\int_0^{+\infty} ug(u)du$ converge et vaut $E(Z)$.

$\displaystyle\int_t^{+\infty} ug(u)du$ est donc convergente.

En intégrant les inégalités $(*)$ entre t et $+\infty$, on a :

$0 \leq \displaystyle\int_t^{+\infty} tg(u)du \leq \int_t^{+\infty} ug(u)du$

avec $\displaystyle\int_t^{+\infty} tg(u)du = t\int_t^{+\infty} g(u)du = tP(Z > t) = tR_Z(t) = v(t)$.

Ainsi, $\forall t \geq 0,\ 0 \leq v(t) \leq \displaystyle\int_t^{+\infty} ug(u)du \quad (**)$.

Enfin, $\displaystyle\int_t^{+\infty} ug(u)du = \int_0^{+\infty} ug(u)du - \int_0^t ug(u)du = E(Z) - \int_0^t ug(u)du$.

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_0^t ug(u)du = \int_0^{+\infty} ug(u)du = E(Z)$.

Par différence, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_t^{+\infty} ug(u)du = 0$.

La propriété des gendarmes dans $(**)$ donne : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} v(t) = 0$.

4)c)Soit $A \geq 0$. En intégrant l'égalité 4)a) entre 0 et A, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^A tg(t)dt &= \int_0^A \big(R_Z(t) - v'(t)\big)dt \\
&= \int_0^A R_Z(t)dt - \int_0^A v'(t)dt \\
&= \int_0^A R_Z(t)dt - [v(t)]_0^A \\
&= \int_0^A R_Z(t)dt - v(A) \quad \text{car } v(0) = 0
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_0^A R_Z(t)dt = v(A) + \int_0^A tg(t)dt$.

$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A tg(t)dt = E(Z)$ et $\lim_{t \to A} v(A) = 0$ d'après 4)b).

Donc $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A R_Z(t)dt = E(Z)$.

$\int_0^{+\infty} R_Z(t)dt$ est donc convergente et vaut $E(Z)$.

5)a)Pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} R_{T_t}(x) &= P_{(T>t)}(T > t+x) \\ &= \frac{P\big((T>t) \cap (T > t+x)\big)}{P(T>t)} \\ &= \frac{P(T > t+x)}{P(T>t)} \quad \text{car } (T > t+x) \subset (T > t) \text{ du fait que } x \geq 0 \\ &= \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)}. \end{aligned}$$

5)b)En appliquant la question 4)c) avec $Z \to T_t$, on a :

$$\begin{aligned} E(T_t) &= \int_0^{+\infty} R_{T_t}(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)} dx \quad \text{d'après } 5)a) \\ &= \frac{1}{R_T(t)} \int_0^{+\infty} R_T(t+x)dx \\ &= \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u)du \quad \text{en posant } u = t+x \end{aligned}$$

Remarque
Pour légitimer ce calcul, il faudrait en principe s'assurer que T_t vérifie bien toutes les conditions de la question 4), c'est le cas :

- T_t admet une espérance (fonction affine de T et T admet une espérance)
- T_t est positive car on a pris comme hypothèse que $T > t$
- T_t est une variable aléatoire à densité. En effet, sa fonction de répartition F_{T_t} vérifie pour tout $x \in \mathbf{R}$: $F_{T_t}(x) = P(T_t \leq x) = P(T \leq t+x)$, c'est-à-dire :

$$F_{T_t}(x) = F_T(t+x).$$

T est à densité, F est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en 0.
Par composée, F_{T_t} est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en $-t$.

- T_t a une densité continue sur $\mathbf{R}_+$. En effet, F_T est dérivable sur $[0, +\infty[$.

Par composée, F_{T_t} est dérivable sur $[-t, +\infty[$ donc sur $[0, +\infty[$.
Une densité f_{T_t} de T_t est donnée par : $\forall x \geq 0,\ f_{T_t}(x) = F'_{T_t}(x) = F'_T(t+x)$, c'est-à-dire :

$$f_{T_t}(x) = f_T(t+x).$$

f_T est continue sur $[0, +\infty[$.
Par composée, f_{T_t} est continue sur $[-t, +\infty[$ donc sur $[0, +\infty[$.

6)a)$T \hookrightarrow \mathscr{E}(\mu)$ donc pour tout réel $t \geq 0$: $F_T(t) = 1 - e^{-\mu t}$ et $f_T(t) = \mu e^{-\mu t}$.
On déduit pour tout réel $t \geq 0$:

$$R_T(t) = 1 - F_T(t) = e^{-\mu t} \quad \text{et} \quad \lambda(t) = \frac{f_T(t)}{R_T(t)} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu.$$

> Remarque
> Le taux de défaillance est constant.

6)b)Si le premier organe tombe en panne avant le deuxième, la durée de vie du système est $T = T_1 \leq T_2$.
Dans le cas contraire, la durée de vie du système est $T = T_2 \leq T_1$.
Ainsi, dans les deux cas, $T = min(T_1, T_2)$.

$T_1 \hookrightarrow \mathscr{E}(\mu_1)$ et $T_2 \hookrightarrow \mathscr{E}(\mu_2)$. D'après la question I.3)b), $T \hookrightarrow \mathscr{E}(\mu_1 + \mu_2)$.

La question II.6)a) donne alors pour tout réel $t \geq 0$:

$$R_T(t) = e^{-(\mu_1+\mu_2)t} \quad \text{et} \quad \lambda(t) = \mu_1 + \mu_2.$$

6)c)Cette fois-ci, $T = max(T_1, T_2)$ puisque c'est l'organe qui a la durée de vie la plus élevée qui détermine la durée de vie T du système.

On a toujours, par énoncé, $T_1 \hookrightarrow \mathscr{E}(\mu_1)$ et $T_2 \hookrightarrow \mathscr{E}(\mu_2)$.
D'après la question I.3)a), on a pour tout réel $t \geq 0$: $F_T(t) = \left(1 - e^{-\mu_1 t}\right)\left(1 - e^{-\mu_2 t}\right)$.

Donc pour tout réel $t \geq 0$, $R_T(t) = 1 - \left(1 - e^{-\mu_1 t}\right)\left(1 - e^{-\mu_2 t}\right)$.

7)a)• $\varphi_{n,\beta}$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues, mais aussi continue sur $]-\infty, 0[$ comme fonction nulle. Donc $\varphi_{n,\beta}$ est continue sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en 0.

• $\beta > 0$ et l'exponentielle prend des valeurs positives. Donc $\forall t \geq 0,\ \varphi_{n,\beta}(t) \geq 0$.
De plus, $\forall t < 0,\ \varphi_{n,\beta} = 0$. Finalement, $\forall t \in \mathbf{R},\ \varphi_{n,\beta}(t) \geq 0$.

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \varphi_{n,\beta}(t)dt$ converge et vaut 0 car $\varphi_{n,\beta}$ est nulle sur $]-\infty, 0[$.

$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} \beta e^{-\beta t} dt$ de même nature que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^{n-1} \beta e^{-\beta t} dt$.

Cette intégrale converge car elle correspond à l'espérance de X^{n-1} avec $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\beta)$.

Donc $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)dt$ converge.

De plus,
$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)dt &= \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} \int_{0}^{+\infty} t^{n-1} \beta e^{-\beta t} \\
&= \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} E\left(X^{n-1}\right) \\
&= \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} \times \frac{(n-1)!}{\beta^{n-1}} \quad \text{1)c) avec } n \to n-1 \text{ et } \mu \to \beta \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Par Chasles, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n+1,\beta}(t)dt$ converge et vaut 1.

Conclusion : $\varphi_{n,\beta}$ est une densité de probabilité.

7)b)En renommant les lettres $A \to t$, $t \to u$ et $n \to k$, l'intégration par parties faite plus haut donne pour tout réel $t \geq 0$ et tout entier $k \in \mathbf{N}^*$:

$\displaystyle\int_0^t \varphi_{k+1,\beta}(u)du = -\frac{(\beta t)^k}{k!} \times e^{-\beta t} + \int_0^t \varphi_{k,\beta}(u)du$, c'est-à-dire :

$$\int_0^t \varphi_{k,\beta}(u)du - \int_0^t \varphi_{k+1,\beta}(u)du = \frac{(\beta t)^k}{k!} \times e^{-\beta t}$$

En sommant ces égalités pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_0^t \varphi_{k,\beta}(u)du - \int_0^t \varphi_{k+1,\beta}(u)du \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} \times e^{-\beta t}$$

Par télescopage de la somme de droite, on obtient :

$$\int_0^t \varphi_{1,\beta}(u)du - \int_0^t \varphi_{n,\beta}(u)du = e^{-\beta t} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} \quad (*)$$

avec $\displaystyle\int_0^t \varphi_{1,\beta}(u)du = \int_0^t \beta e^{-\beta u}du = \left[-e^{-\beta u}\right]_0^t = 1 - e^{-\beta t}$.

En reportant dans $(*)$, on a :

$\displaystyle 1 - F_T(t) = 1 - \int_0^t \varphi_{n,\beta}(u)du = e^{-\beta t} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} + e^{-\beta t}$, c'est-à-dire :

$$R_T(t) = e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}.$$

8)a)• $\psi_{\beta,\eta}$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues, mais aussi continue sur $]-\infty, 0[$ comme fonction nulle. Donc $\psi_{\beta,\eta}$ est continue sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en 0.

• $\beta > 0$, $\eta > 0$. L'exponentielle prend des valeurs positives. Donc $\forall t \geq 0,\ \psi_{\beta,\eta} \geq 0$. De plus, $\forall t < 0,\ \psi_{\beta,\eta}(t) = 0$. Finalement, $\forall t \in \mathbf{R},\ \psi_{\beta,\eta}(t) \geq 0$.

• $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \psi_{\beta,\eta}(t)dt$ converge et vaut 0 car $\psi_{\beta,\eta}$ est nulle sur $]-\infty, 0[$.

On remarque que sur $[0, +\infty[$, la dérivée de $e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$ est $\displaystyle -\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$.

Pour tout réel $A \geq 0$, on a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^A \psi_{\beta,\eta}(t)dt &= \int_0^A \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} dt \\ &= \left[-e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}\right]_0^A \\ &= 1 - e^{-\left(\frac{A}{\eta}\right)^\beta}.\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -\left(\frac{A}{\eta}\right)^\beta = -\infty$ car $\beta > 0$. D'où $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \psi_{\beta,\eta}(t)dt = 1$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t)dt$ converge et vaut 1.

Par Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t)dt$ converge et vaut 1.

Conclusion : $\psi_{\beta,\eta}$ est une densité de probabilité.

8)b)En reprenant le calcul fait plus haut, on a pour tout réel $t \geq 0$:

$R_T(t) = 1 - F_T(t) = 1 - \displaystyle\int_0^t \psi_{\beta,\eta}(t)dt = 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}\right) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$.

Puis, pour tout réel $t \geq 0$:

$$\lambda(t) = \frac{\psi_{\beta,\eta}(t)}{R_T(t)} = \frac{\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}}{e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}} = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}.$$

8)c)Distinguons deux cas :

• $\beta = 1$

$\lambda(t) = \dfrac{1}{\eta}$. La fonction λ est constante et $\lim\limits_{t\to+\infty} \lambda(t) = \dfrac{1}{\eta}$.

• $\beta > 1$

$\lim\limits_{t\to+\infty} \left(\dfrac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} = +\infty$ et $\dfrac{\beta}{\eta} > 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \lambda(t) = +\infty$.

Partie III : système Poissonien

1)a)Soit $s \in [0, 1]$ et $u \geq 0$.
Pour que $G_u(s)$ existe, il faut que s^{N_u} admette une espérance.
D'après le théorème de transfert, cela se produit si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geq 0} s^k P(N_u = k)$ est absolument convergente.

Or, $\forall k \in \mathbf{N}$, $\left|s^k P(N_u = k)\right| = s^k P(N_u = k) \leq P(N_u = k)$.

La sérié $\sum\limits_{k\geq 0} P(N_u = k)$ converge (de somme 1). D'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{k\geq 0} \left|s^k P(N_u = k)\right|$ converge.

Donc s^{N_u} admet une espérance, donnée par le théorème de transfert égale à :

$$G_u(s) = E\big(s^{N_u}\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_u = k)s^k.$$

1)b)Soient $u \geq 0$ et $v \geq 0$. Soit $s \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} G_{u+v}(s) &= E\big(s^{N_{u+v}}\big) \\ &= E\big(s^{N_u + (N_{u+v} - N_u)}\big) \\ &= E\big(s^{N_u} s^{N_{u+v} - N_u}\big). \end{aligned}$$

($\mathbf{P_2}$) avec $t_0 \to u$ et $t_1 \to u + v$ justifie l'indépendance de N_u et $N_{u+v} - N_u$.
D'après le lemme des coalitions, toute fonction de N_u est indépendante de toute fonction de $N_{u+v} - N_u$. Donc s^{N_u} et $s^{N_{u+v}-N_u}$ sont indépendantes.

On a alors : $E\big(s^{N_u} s^{N_{u+v}-N_u}\big) = E\big(s^{N_u}\big)E\big(s^{N_{u+v}-N_u}\big)$.

D'après $(\mathbf{P_3})$ avec $s \to u$ et $t \to u+v$, les variables aléatoires $N_{u+v} - N_u$ et N_v ont même loi.

$s^{N_{u+v}-N_u}$ et s^{N_v} ont donc même loi et en conséquence même espérance.

On finit le calcul : $E\big(s^{N_u} s^{N_{u+v}-N_u}\big) = E\big(s^{N_u}\big)E\big(s^{N_v}\big)$, c'est-à-dire :

$$G_{u+v}(s) = G_u(s)G_v(s).$$

Remarque
En écrivant $N_{u+v} = N_u + \big(N_{u+v} - N_u\big)$, en utilisant l'indépendance de N_u et $N_{u+v} - N_u$ et $(\mathbf{P_3})$, on pouvait obtenir la loi de N_{u+v} :

$P(N_{u+v} = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} P(N_u = i)P(N_v = k-i)$.

D'où $G_{u+v}(s) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(N_{u+v} = k)s^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{k} P(N_u = i)P(N_v = k-i)s^k$

$= \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\sum_{k=0}^{+\infty} P(N_u = i)P(N_v = k-i)s^k = \cdots$

Reste à justifier qu'on peut permuter les sommes !

2)a)$G_1(s) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(N_1 = k)s^k = P(N_1 = 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{P(N_1 = k)s^k}_{\geq 0} \geq P(N_1 = 0)$.

D'après $(\mathbf{P_1})$, on a : $P(N_1 = 0) > 0$.

Donc $G_1(s) > 0$.

2)b)Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a : $\psi(k) = G_k(s)$ et $e^{-k\theta(s)} = e^{k \ln G_1(s)} = G_1(s)^k$.
Il faut donc établir que $\forall k \in \mathbf{N},\ G_k(s) = G_1(s)^k$. Une récurrence s'impose.

Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition : « $G_k(s) = G_1(s)^k$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $G_0(s) = 1$ ».

$$\begin{aligned}
\text{Or, } G_0(s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_0 = k)s^k \\
&= P(N_0 = 0)s^0 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(N_0 = k)s^k \\
&= 1 \quad \text{car } N_0 \text{ est certaine et égale à } 0.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $k \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
G_{k+1}(s) &= G_k(s)G_1(s) \quad \text{d'après III.1)b) avec } u \to k \text{ et } v \to 1 \\
&= G_1(s)^k G_1(s) \quad \text{par HR} \\
&= G_1(s)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall k \in \mathbf{N},\ G_k(s) = G_1(s)^k$.

Ainsi, $\forall k \in \mathbf{N},\ \psi(k) = e^{-k\theta(s)}$.

2)c)Soit $q \in \mathbf{N}^*$.
Comme dans la question précédente, on montre par récurrence que

$$\forall k \in \mathbf{N},\ G_{\frac{k}{q}}(s) = \left(G_{\frac{1}{q}}(s)\right)^k \qquad (*)$$

Pour $k = q$, on a en particulier : $G_1(s) = \left(G_{\frac{1}{q}}(s)\right)^q$, puis $G_{\frac{1}{q}}(s) = \left(G_1(s)\right)^{\frac{1}{q}}$.
On déduit :
$\psi\left(\dfrac{1}{q}\right) = G_{\frac{1}{q}}(s) = \left(G_1(s)\right)^{\frac{1}{q}} = \left(e^{-\theta(s)}\right)^{\frac{1}{q}} = e^{-\frac{1}{q}\theta(s)}$.

2)d)Soit $p \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}^*$. Soit $r = \frac{p}{q}$.

$$\begin{aligned}\psi(r) &= G_{\frac{p}{q}}(s)\\ &= \left(G_{\frac{1}{q}}(s)\right)^p \quad \text{en appliquant } (*) \text{ avec } k \to p\\ &= \left(e^{-\frac{1}{q}\theta(s)}\right)^p \quad \text{voir calcul de la question III.2)c}\\ &= e^{-\frac{p}{q}\theta(s)}\\ &= e^{-r\theta(s)}.\end{aligned}$$

2)e)Soit $u \geq 0$. Posons $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n u \rfloor}{10^n}$.

• u_n est un nombre rationnel, c'est-à-dire un quotient d'entiers. Il représente la troncature de u à n décimales près.
De l'inégalité classique $\forall x \in \mathbf{R},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, on déduit pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$\lfloor 10^n u \rfloor \leq 10^n u < \lfloor 10^n u \rfloor + 1$
$10^n u - 1 < \lfloor 10^n u \rfloor \leq 10^n u$
$\dfrac{10^n u - 1}{10^n} < \dfrac{\lfloor 10^n u \rfloor}{10^n} \leq u$
$u - \dfrac{1}{10^n} < u_n \leq u$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(u - \dfrac{1}{10^n}\right) = u$. D'après la propriété des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u$.

• L'inégalité ci-dessus donne : $u_n \leq u \leq u_n + \dfrac{1}{10^n}$.
Posons $v_n = u_n + \dfrac{1}{10^n}$.
L'énoncé précise que si $s \leq t$, alors $N_s \leq N_t$. Donc $N_{u_n} \leq N_u \leq N_{v_n}$
Comme $s \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto s^x$ est décroissante sur $\mathbf{R}$. On déduit :

$$s^{N_{v_n}} \leq s^{N_u} \leq s^{N_{u_n}}$$

Par croissance de l'espérance :

$$E\left(s^{N_{v_n}}\right) \leq E\left(s^{N_u}\right) \leq E\left(s^{N_{u_n}}\right)$$

C'est-à-dire

$$G_{v_n}(s) \leq G_u(s) \leq G_{u_n}(s)$$

u_n et v_n étant des nombres rationnels, la question III.2)d) s'applique et donne :

$$e^{-v_n\theta(s)} \leq G_u(s) \leq e^{-u_n\theta(s)} \quad (*)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = u$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-v_n\theta(s)} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-u_n\theta(s)} = e^{-u\theta(s)}$.
Par passage à la limite dans $(*)$: $e^{-u\theta(s)} \leq G_u(s) \leq e^{-u\theta(s)}$.

$$\text{Ainsi }, \forall u \geq 0,\ G_u(s) = e^{-u\theta(s)}.$$

> Remarque
> Une question infaisable, sans l'indication que j'ai rajoutée.

2)f)Soit $s \in [0,1]$.

Pour tout $h > 0$, la question III.2)e) donne : $\dfrac{G_h(s)-1}{h} = \dfrac{e^{-h\theta(s)}-1}{h}$.

$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ et $\lim\limits_{h\to0^+} -h\theta(s) = 0$ donc $e^{-h\theta(s)} - 1 \underset{0}{\sim} -h\theta(s)$.

Donc $\dfrac{G_h(s)-1}{h} \underset{0}{\sim} -\theta(s)$, ce qui signifie que $\lim\limits_{h\to0^+} \dfrac{G_h(s)-1}{h} = -\theta(s)$.

3)Soit $s \in [0,1]$.

$$\sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1) - P(N_h = 0)\underbrace{(s^0 - 1)}_{=0} - P(N_h = 1)(s^1 - 1)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \big(P(N_h = k)s^k - P(N_h = k)\big) - P(N_h = 1)(s - 1)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_h = k)s^k - \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_h = k) - P(N_h = 1)(s - 1)$$
$$= G_h(s) - 1 - P(N_h = 1)(s - 1).$$

Donc $G_h(s) - 1 = P(N_h = 1)(s-1) + \sum\limits_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1)$.

4)Soit $s \in [0,1]$.

$\forall k \in \mathbf{N},\ -1 \leq s^k - 1 \leq 0$ donc $-P(N_h = k) \leq P(N_h = k)(s^k - 1) \leq 0$.

On somme ces inégalités pour k allant de 2 à $+\infty$:

$$-\sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k) \leq \sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1) \leq 0.$$

Comme N_h prend ses valeurs dans $\mathbf{N}$, on a : $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k) = P(N_h > 1)$.

Puis, en divisant membre à membre par h :

$$-\frac{P(N_h > 1)}{h} \leq \frac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} P(N_h = k)(s^k - 1)}{h} \leq 0.$$

D'après ($\mathbf{P_4}$), on a : $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{P(N_h>1)}{h} = 0$.

La propriété des gendarmes donne alors : $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{\sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h=k)(s^k-1)}{h} = 0$.

5)a)Soit $s\in[0,1[$. Divisons membre à membre par h l'égalité trouvée en III.3) :

$$\frac{G_h(s)-1}{h} = \frac{P(N_h=1)}{h}(s-1) + \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h=k)(s^k-1)}{h}.$$

D'après III.2)f), on a : $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{G_h(s)-1}{h} = -\theta(s)$.

D'après III.4), on a : $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{\sum_{k=2}^{+\infty} P(N_h=k)(s^k-1)}{h} = 0$.

Donc $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{P(N_h=1)}{h}(s-1) = -\theta(s)$, ce qui donne : $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{P(N_h=1)}{h} = \dfrac{\theta(s)}{1-s}$.

Posons $\alpha = \dfrac{\theta(s)}{1-s}$, ce qui est équivalent à $\theta(s) = \alpha(1-s)$.

On a alors : $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{P(N_h=1)}{h} = \alpha \ =$ constante, par unicité de la limite.

Comme $\forall h>0$, $\dfrac{P(N_h-1)}{h} > 0$, on a par passage à la limite : $\alpha \geq 0$.

5)b)Pour tout réel $s\in[0,1[$, on vient de voir que $\alpha = \dfrac{\theta(s)}{1-s}$.

En particulier, pour $s=0$, on a :

$\alpha = \theta(0) = -\ln G_1(0) = -\ln P(N_1=0)$.

Or, d'après ($\mathbf{P_1}$), on a : $0 < P(N_1=0) < 1$. Donc $\alpha > 0$.

5)c)Soit $u>0$. Soit $s\in[0,1]$.

D'après les questions III.2)e) et III.5)a), on a : $G_u(s) = e^{-u\alpha(1-s)}$.

$$\begin{aligned}
\text{Puis, } G_u(s) &= e^{-\alpha u+\alpha us} \\
&= e^{-\alpha u}e^{\alpha us} \\
&= e^{-\alpha u} \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha us)^k}{k!} \quad \text{en utilisant la série exponentielle} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\alpha u}\frac{(\alpha u)^k}{k!}s^k.
\end{aligned}$$

Quant à l'égalité $G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_u=k)s^k$, elle provient de III.1)a).

5)d))Soit $u>0$. Pour tout $k\in\mathbf{N}$, posons $p_k = e^{-\alpha u}\dfrac{(\alpha u)^k}{k!}$.

D'après la question précédente, on a pour tout réel $s \in [0,1]$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(N_u = k)s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k s^k \quad (*)$$

Montrons par récurrence forte que $\forall k \in \mathbf{N},\ P(N_u = k) = p_k$.

Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition : « $P(N_u = k) = p_k$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $P(N_u = 0) = p_0$ ».
Elle est vraie, on l'obtient immédiatement en écrivant $(*)$ pour $s = 0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(0)$, ... , $\mathscr{P}(n)$ vraies. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a $\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(N_u = k) = p_k$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(N_u = k)s^k = \sum_{k=0}^{n} p_k s^k \quad (**)$

En soustrayant membre à membre les égalités $(*)$ et $(**)$ et par la relation de Chasles, on obtient pour tout réel $s \in [0,1]$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} P(N_u = k)s^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p_k s^k$$

$$P(N_u = n+1)s^{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} P(N_u = k)s^k = p_{n+1}s^{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} p_k s^k$$

Puis, en posant $j = k - (n+2)$ dans chacune des sommes :

$$P(N_u = n+1)s^{n+1} + \sum_{j=0}^{+\infty} P(N_u = j+n+2)s^{j+n+2} = p_{n+1}s^{n+1} + \sum_{j=0}^{+\infty} p_{j+n+2}s^{j+n+2}$$

En sortant s^{n+2} des deux sommes, puis en divisant membre à membre par s^{n+1}, on obtient pour tout réel $s \in]0,1[$:

$$P(N_u = n+1) + s\sum_{j=0}^{+\infty} P(N_u = j+n+2)s^j = p_{n+1} + s\sum_{j=0}^{+\infty} p_{j+n+2}s^j \quad (***)$$

Or, pour tout $j \in \mathbf{N}$, on a :
$0 \leq P(N_u = j+n+2) \leq 1$ donc $0 \leq P(N_u = j+n+2)s^j \leq s^j$.

On déduit : $\displaystyle 0 \leq \sum_{j=0}^{+\infty} P(N_u = j+n+2)s^j \leq \sum_{j=0}^{+\infty} s^j = \frac{1}{1-s}$.

En multipliant membre à membre par s :

$$0 \leq s\sum_{j=0}^{+\infty} P(N_u = j+n+2)s^j \leq \frac{s}{1-s}.$$

$\displaystyle \lim_{s\to 0^+} \frac{s}{1-s} = 0$ donc $\displaystyle \lim_{s\to 0^+} s\sum_{j=0}^{+\infty} P(N_u = j+n+2)s^j = 0$ (gendarmes)

Comme p_n est la probabilité d'une loi de Poisson, on a par le même raisonnement :

$\displaystyle \lim_{s\to 0^+} s\sum_{j=0}^{+\infty} p_{j+n+2}s^j = 0.$

Un passage à la limite dans $(***)$ quand $s \to 0^+$ donne : $P(N_u = n+1) = p_{n+1}$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ P(N_u = n) = p_n = e^{-\alpha u}\dfrac{(\alpha u)^k}{k!}$. Donc $N_u \hookrightarrow \mathscr{P}(\alpha u)$.

> Remarque
> Encore une question bien difficile.
> C'est un résultat classique (hors programme) : on vient de montrer que si deux variables aléatoires X et Y ont la même fonction génératrice, alors elles ont même loi. La réciproque est évidente.

6)• L'événement $(T > t)$ est réalisé si et seulement si la première panne survient dans l'intervalle de temps $]t, +\infty[$, ce qui se produit si et seulement si il n'y a pas de panne dans l'intervalle de temps $[0, t]$, soit si et seulement si $(N_t = 0)$ est réalisé. Donc $(T > t) = (N_t = 0)$.

• D'après III.5)d), $N_t \hookrightarrow \mathscr{P}(\alpha t)$. Donc $\forall k \in \mathbf{N},\ P(N_t = k) = e^{-\alpha t}\dfrac{(\alpha t)^k}{k!}$.

Pour tout réel $t \geq 0$, on a :

$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(N_t = 0) = 1 - e^{-\alpha t}$.

Et pour tout réel $t < 0$, on a : $F_T(t) = P(T \leq t) = 0$ car T est positive.

On conclut que $F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

Donc $T \hookrightarrow \mathscr{E}(\alpha)$.

7)a)N_{t+h} est le nombre de pannes survenant dans l'intervalle $[0, t+h]$.
N_t est le nombre de pannes survenant dans l'intervalle $[0, t]$.
Donc $N_{t+h} - N_t$ est le nombre de pannes survenant dans l'intervalle $]t, t+h]$.

7)b)• L'essentiel est de montrer que la famille $(\tilde{N}_h)_{h\geq 0}$ vérifie les quatre propriétés du début de la partie III.
Remarquons tout d'abord que $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$ et N_h ont même loi grâce à (P_3).

$(\mathbf{Q_1})$ $\quad \tilde{N}_0 = N_t - N_t = 0$.

Pour tout réel $h > 0$: $P(\tilde{N}_h = 0) = P(N_h = 0) \in \,]0, 1[$ grâce à (P_1).

$(\mathbf{Q_2})$ $\quad$ Soient $t_0, t_1, \ldots, t_n$ des réels tels que $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$.
On a alors : $t \leq t + t_0 < t + t_1 < \cdots < t + t_n$.

D'après (P_2), les variables aléatoires $N_{t+t_0} - N_t$, $N_{t+t_1} - N_{t+t_0}$, ..., $N_{t+t_n} - N_{t+t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes.

Donc $\tilde{N}_{t_0}$, $\tilde{N}_{t_1} - \tilde{N}_{t_0}$,..., $\tilde{N}_{t_n} - \tilde{N}_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes.

$(\mathbf{Q_3})$ $\quad$ Soient h et k des réels tels que $0 < h < k$.

$\tilde{N}_k - \tilde{N}_h = (N_{t+k} - N_t) - (N_{t+h} - N_t) = N_{t+k} - N_{t+h}$ a même loi que N_{k-h} grâce à (P_3) et donc la même loi que $\tilde{N}_{k-h}$.

$(\mathbf{Q_4})$ $\quad \displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{P(\tilde{N}_h > 1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{P(N_h > 1)}{h}$ car N_h et $\tilde{N}$ ont même loi.

Et cette limite vaut 0 grâce à (P_4).

La famille $(\tilde{N}_h)_{h\geq 0}$ est donc bien un processus de Poisson.

• Il reste à établir que le paramètre est α.

Or, d'après la question III.5)a), on a : $\alpha = \lim_{h \to 0^+} \frac{P(N_h = 1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{P(\tilde{N}_h = 1)}{h}$

car N_h et et $\tilde{N}$ ont même loi.

• La famille $(\tilde{N}_h)_{h \geq 0}$ est donc un processus de Poisson de paramètre α.
Et on a donc en particulier : $\tilde{N}_h \hookrightarrow \mathscr{P}(\alpha h)$.

7)c)Notons $\tilde{T}$ la variable aléatoire égale à la date de la première panne survenant après la date t.
Les événements $(\tilde{T} > u)$ et $(\tilde{N}_u = 0)$ sont égaux.
En effet, $(\tilde{T} > u)$ est réalisé si et seulement si il n'y a pas de panne dans l'intervalle de temps $[t, t+u]$, c'est-à-dire si et seulement si $(N_t = 0)$ est réalisé.
$\tilde{N}_u \hookrightarrow \mathscr{P}(\alpha u)$ donc $\tilde{T} \hookrightarrow \mathscr{E}(\alpha)$ en reprenant le calcul de III.6).

7)d)Soit t un temps donné fixé.
La variable aléatoire $\tilde{T}$, égale à la date de la première panne survenant après la date t correspond, en terme de fiabilité, à la durée de vie du système après t.
Comme $\tilde{N}_h \hookrightarrow \mathscr{P}(\alpha h)$, on sait d'après la question II.6)a) que le taux de défaillance du système est constant et vaut α.