

emLyon 2023

Exercice 1

Études de fonctions et de suites

Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n .

- a) Étudier les variations de f (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).
b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. Informatique.

- a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```
def fonc_1(a):  
    from numpy import exp  
    u=1  
    n=0  
    while ..... :  
        u=exp(-u)/u  
        n=....  
    return n
```

- b) On considère maintenant la fonction Python :

```
def fonc_2(a):  
    from numpy import exp  
    u=1  
    n=0  
    while u>a :  
        u=exp(-u)/u  
        n=n+1  
    return n
```

Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5.
Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?
Commenter ce résultat en une ligne.

- c) Écrire une fonction Python qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n .
3. Pour $x \in [0, +\infty[$ on pose : $g(x) = e^{-x} - x^2$.
- Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $] - \infty, 1]$.
 - En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x , possède une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$, que l'on notera α .
 - Justifier que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$. On rappelle que $e \approx 2,7$.
4. a) Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.
- En déduire que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
5. Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.
- Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.
 - Démontrer que h est continue sur $[0, +\infty[$.
 - Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x , admet exactement deux solutions sur $[0, +\infty[$ qui sont 0 et α , α étant le réel introduit à la question 3b.
 - En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
6. La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?

Exercice 2

Deux systèmes différentiels

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie I - Réduction de la matrice A

- Quel est le rang de la matrice $A - 2I$?
 - Justifier que 2 est valeur propre de la matrice A et déterminer la dimension du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2 .
 - Donner une base de E_2 .
 - Combien de valeurs propres autres que 2 la matrice A peut-elle avoir ?
- Dans cette sous-question M est une matrice dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et U est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Que représentent les coordonnées du vecteur colonne MU pour la matrice M ?
 - En déduire la dernière valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.
- Donner une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de préciser la matrice P^{-1}).

Partie II - Un système différentiel

On considère le système différentiel

$$(S) \begin{cases} x' &= 3x + y + z \\ y' &= x + 3y + z, \\ z' &= x + y + 3z \end{cases}$$

où x , y et z désignent des fonctions dérivables sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} .

4. Résoudre le système différentiel (S).

5. a) Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel

$$(S) \text{ telle que } X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$

b) Déterminer la solution X_0 de la question précédente.

Partie III - Un second système différentiel

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Déterminer les valeurs propres de B .

7. La matrice B est-elle diagonalisable ?

8. On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 tel que B est la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^2 . On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.

a) Justifier que $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 .

b) Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base β ?

c) Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.

9. En déduire la résolution du système différentiel

$$(\Sigma) \begin{cases} x' &= -x - 4y \\ y' &= x + 3y \end{cases},$$

où x et y sont des fonctions dérivables sur \mathbb{R} à valeurs réelles.

Exercice 3

L'entropie en probabilité

L'objet de cet exercice est d'introduire la fonction d'entropie qui mesure l'incertitude sur la valeur prise par une variable aléatoire donnée.

Notation

Dans l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et $\llbracket 1, n \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers compris entre 1 et n :

$$\llbracket 1, n \rrbracket = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n\}.$$

Les parties II et III sont indépendantes, mais utilisent des résultats de la partie I.

Partie I - Préliminaire

1. Soit $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
 - a) Démontrer que la fonction h est continue sur \mathbb{R}^+ .
 - b) La fonction h est-elle dérivable en 0 ?
 - c) Déterminer les antécédents de 0 par la fonction h .
2. Pour tout x dans $[0, 1]$ on pose $g(x) = -h(x) - h(1-x)$.
Dresser le tableau de variations de la fonction g .

Partie II - Des variables aléatoires discrètes

Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , l'entropie de X est, sous réserve d'existence :

$$H(X) = - \sum_{x \in X(\Omega)} h(P(X = x))$$

En particulier, lorsque X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, l'entropie de X existe toujours et vaut :

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n h(p_i)$$

où, pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i = P(X = x_i)$.

3. Dans cette question U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme discrète sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminer $H(U)$.
4. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Démontrer que $H(X) \leq \ln 2$ avec égalité si et seulement si $p = \frac{1}{2}$. On pourra utiliser la question 2.
5. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes qui suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2 , définies sur le même espace probabilisé.
Soit Z la variable aléatoire telle que :
 - $Z(\Omega) = \{0, 1\}$,
 - l'événement $[Z = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « $X_1 + X_2$ est impair » est réalisé.On définit le réel p par : $p = P(Z = 1)$.
 - a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $X_1 + X_2$?
 - b) Démontrer que $p = p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1)$.
 - c) Vérifier que $1 - 2p = (1 - 2p_1)(1 - 2p_2)$
6. Soit $p \in]0, 1[$ et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires (mutuellement) indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et on considère la variable aléatoire Z_n telle que :

- $Z_n(\Omega) = \{0, 1\}$,
 - l'événement $[Z_n = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « S_n est impair » est réalisé.
- a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de la variable aléatoire S_n ?
 - b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 - 2P(Z_n = 1) = (1 - 2p)^n$ (on pourra raisonner par récurrence).
 - c) Démontrer que $H(Z_n) \leq \ln 2$. Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

Partie III - Des variables à densité

Si X est une variable aléatoire sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) de densité f , on dit que X admet une entropie lorsque l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t) dt$ converge absolument ; l'entropie de X est alors :

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t) dt.$$

7. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a, b]$ où a et b sont des réels tels que $a < b$.

- a) Démontrer que U admet une entropie.
- b) Déterminer $H(U)$.

8. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité f .

- a) Justifier de la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ et déterminer sa valeur.
- b) Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = 1 - \ln \lambda$.

9. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On note ϕ la densité usuelle de la variable aléatoire X .

- a) Donner l'espérance et la variance de X . En déduire la valeur de l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t) dt$.
- b) Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = \frac{1 + \ln(2\pi\sigma^2)}{2}$.

FIN DE L'ÉNONCÉ
