Corrrection DS1 cubes

Exercice 1 (edhec 2015 option maths approfondies)

1)$x+1 \underset{+\infty}{\sim} x$ donc $x^n(x+1) \underset{+\infty}{\sim} x^{n+1}$, puis $\dfrac{1}{x^n(x+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{n+1}}$.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}}\mathrm{d}x$ converge car c'est une intégrale de Riemann de paramètre $n+1>1$.

D'après le critère d'équivalence sur les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(x+1)}\mathrm{d}x$ est convergente.

2)a)Pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1} &\iff \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a(x+1)-bx}{x(x+1)}\\
&\iff 1 = a(x+1) - bx\\
&\iff 0x + 1 = (a-b)x + a\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccc} a & - & b & = & 0\\ a & & & = & 1\end{array}\right. \quad \text{par identification}\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} b & = & 1\\ a & = & 1\end{array}\right.
\end{aligned}$$

2)b)$I_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$= \displaystyle\lim_{A\to+\infty} [\ln x - \ln(x+1)]_1^A = \lim_{A\to+\infty}(\ln A - \ln(A+1) + \ln 2) = \lim_{A\to+\infty}\left(-\ln\left(1+\frac{1}{A}\right) + \ln 2\right)$.

Or, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(1+\frac{1}{A}\right) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to1}\ln x = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -\ln\left(1+\frac{1}{A}\right) = 0$.

Ainsi, $I_1 = \ln 2$.

3)a)$\forall x \in [1, +\infty[\,, x+1 \geq 2$ donc $x^n(x+1) \geq 2x^n$.

On déduit que $\forall x \in [1,+\infty[\,, 0 \leq \dfrac{1}{x^n(x+1)} \leq \dfrac{1}{2x^n}$.

Comme $n \geq 2$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^n}\mathrm{d}x$ converge. Il est donc possible d'intégrer les inégalités précédentes entre les bornes croissantes 1 et $+\infty$, ce qui donne :

$\displaystyle\int_1^{+\infty} 0\mathrm{d}x \leq \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n(x+1)}\mathrm{d}x \leq \int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^n}\mathrm{d}x$.

Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} 0\mathrm{d}x = 0$,

et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^n}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{1}{2x^n}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{x^{-n+1}}{2(-n+1)}\right]_1^A$

$= \displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{1}{2(-n+1)}\left(\frac{1}{A^{n-1}} - 1\right)\right] = \frac{1}{2(n-1)}$.

Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$, on a : $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{2(n-1)}$.

3)b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2(n-1)} = 0$. Donc d'après la propriété des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

4)a)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+1} &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(x+1)}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^n(x+1)} + \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^n(x+1)}\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{1}{x^{n+1}}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{x^{-n}}{-n}\right]_1^A = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{-1}{A^n} + 1\right) = \frac{1}{n}$.

Donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a : $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n}$.

4)b)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(x+1)}\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^{n+1}(x+1)} - \frac{1}{x^n(x+1)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1-x}{x^{n+1}(x+1)}$ est négative sur $[1, +\infty[$.

Par croissance de l'intégrale ($1 < +\infty$), on a : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)}\mathrm{d}x \leq 0$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}^*, I_{n+1} - I_n \leq 0$. Donc la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

4)c)Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$I_{n+1} \leq I_n$ donc $I_n + I_{n+1} \leq 2I_n$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{n} \leq 2I_n$ grâce à 4)a).

Ainsi, $\dfrac{1}{2n} \leq I_n$, puis grâce à 3)a) : $\dfrac{1}{2n} \leq I_n \leq \dfrac{1}{2(n-1)}$.

On déduit : $1 \leq 2nI_n \leq \dfrac{n}{n-1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n-1} = 1$ donc d'après la propriété des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nI_n = 1$, ce qui prouve que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n}$ diverge car elle a même nature que la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

D'après le critère d'équivalence sur les séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} I_n$ diverge.

5)a)$(x+1)^2 \underset{+\infty}{\sim} x^2$ donc $x^n(x+1)^2 \underset{+\infty}{\sim} x^{n+2}$, puis $\dfrac{1}{x^n(x+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{n+2}}$.

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+2}}\mathrm{d}x$ converge car c'est une intégrale de Riemann de paramètre $n+2>1$.
D'après le critère d'équivalence sur les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(x+1)^2}\mathrm{d}x$ est convergente.

5)b) $J_0 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \lim\limits_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{x+1}\right]_1^A$
$= \lim\limits_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{A+1}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

6)a)Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} J_k + J_{k-1} &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k(x+1)^2}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{k-1}(x+1)^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^k(x+1)^2} + \frac{1}{x^{k-1}(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1+x}{x^k(x+1)^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k(x+1)}\mathrm{d}x \\ &= I_k. \end{aligned}$$

6)b)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(J_k + J_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1}J_{k-1} - (-1)^k J_k\right)$$

$= (-1)^{1-1}J_0 - (-1)^n J_n$ par télescopage des termes.

On déduit : $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \frac{1}{2} + (-1)^{n+1} J_n$.

6)c) $\forall x \in [1,+\infty[\,, (x+1)^2 \geq 4$ donc $x^n(x+1)^2 \geq 4x^n$.

On déduit que $\forall x \in [1,+\infty[\,, 0 \leq \frac{1}{x^n(x+1)^2} \leq \frac{1}{4x^n}$.

Comme $n \geq 2$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{4x^n}\mathrm{d}x$ converge. Il est donc possible d'intégrer les inégalités précédentes entre les bornes croissantes 1 et $+\infty$, ce qui donne :

$$\int_1^{+\infty} 0\mathrm{d}x \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(x+1)^2}\mathrm{d}x \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{4x^n}\mathrm{d}x.$$

Or, $\int_1^{+\infty} 0\mathrm{d}x = 0$,

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{4x^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{4(n-1)}$ en reprenant le calcul de 3)a).

Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$, on a : $0 \leq J_n \leq \frac{1}{4(n-1)}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4(n-1)} = 0$. Donc d'après la propriété des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on a : $0 \leq \left|(-1)^{n+1} J_n\right| \leq J_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = 0$.

D'après la propriété des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|(-1)^{n+1} J_n\right| = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^{n+1} J_n = 0$.

La question 6)b) donne alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \dfrac{1}{2}$.

Cela prouve que la série $\sum\limits_{n \geq 1} (-1)^{n-1} I_n$ converge et que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} I_k = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 (EDHEC 2000):

1) a)- La matrice nulle O appartient à E car OK = KO = O

- Soient M et M' deux matrices de E.

(M+M')K = MK + M'K
= KM + KM' car M et M' appartiennent à E
= K(M+M')

(M+M')K = MK+M'K
= M+M' car M et M' appartiennent à E

On conclut que M+M' appartient à E.

- Soit M une matrice de E et α un réel.

(αM)K = α(MK)
= α(KM) car M appartient à E
= K(αM)

(αM)K = α(MK)
= α(KM) car M appartient à E
= αM

On conclut que αM appartient à E

En conclusion : E est une partie non-vide de $M_3(R)$ stable pour l'addition et la multiplication externe, E est donc un sous-espace vectoriel de $M_3(R)$.
E hérite donc des propriétés de $M_3(R)$. E est donc un espace vectoriel.

1) b) Supposons qu'il existe une matrice de E, notons-la M, inversible.
De l'égalité KM = M, on déduirait (KM) M^{-1} = M M^{-1}
K(M M^{-1}) = M M^{-1}
KI = I d'où K=I ce qui est absurde.

2) a) Soit M = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de E.

L'égalité MK = KM = M mène à : $\begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ k & h & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$

D'où k = g = c = a
h = b
f = d

Les matrices de E sont donc de la forme $\begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix}$ où a, b, d, e sont des réels quelc.

2) b) Les matrices de E ont deux lignes identiques donc ne peuvent être inversibles. En effet, partant d'une matrice de E, on fait apparaître par l'opération $L_3 \leftarrow L_1 - L_3$ une matrice équivalente comportant une ligne de zéros sur sa troisième ligne donc non inversible.

2) c) D'après la question 2) a), on peut dire que les matrices de E sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi E = Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est donc une famille génératrice de E.

D'autre part, c'est une famille libre car :

si $a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

alors $\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d'où $\begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ce qui mène à a = b = d = e = 0

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E.

Donc E est de dimension 4.

3) a) Toute matrice M de F s'écrit sous la forme :

$$M = x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

Par ailleurs, les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartiennent à E car de la forme 2)a).

On peut donc conclure que F est un sous-espace vectoriel de E.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est donc une famille génératrice

de F et on vérifie aisément que c'est une famille libre. C'est donc une base de F.

3) b) Les matrices de F sont symétriques donc diagonalisables.

3) c) Soit $U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Comme U appartient à E, U n'est pas inversible donc 0 est valeur propre de U.
Pour trouver E_0 = ker(U) on résout UX = O ce qui donne :

$$\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 & L_1 \\ x + 2y + z = 0 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 & L_1 \\ 2x + 2z = 0 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

Donc $E_0 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Cherchons maintenant les autres valeurs propres λ <u>non-nulles</u>.

$$UX = \lambda X \iff \begin{array}{ll} (3-\lambda)x + 2y + 3z = 0 & L_1 \\ 2x + (4-\lambda)y + 2z = 0 & L_2 \\ 3x + 2y + (3-\lambda)z = 0 & L_3 \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{ll} 3x + 2y + (3-\lambda)z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ 2x + (4-\lambda)y + 2z = 0 & L_2 \\ (3-\lambda)x + 2y + 3z = 0 & L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{ll} 3x + 2y + (3-\lambda)z = 0 & L_1 \\ (-8+3\lambda)y - 2\lambda z = 0 & L_2 \leftarrow 2L_1 - 3L_2 \\ -2\lambda y + (\lambda^2-6\lambda)z = 0 & L_3 \leftarrow (3-\lambda)L_1 - 3L_3 \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{ll} 3x + 2y + (3-\lambda)z = 0 & L_1 \\ -2\lambda y + (\lambda^2-6\lambda)z = 0 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ (-8+3\lambda)y - 2\lambda z = 0 & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{ll} 3x + 2y + (3-\lambda)z = 0 & L_1 \\ -2\lambda y + (\lambda^2-6\lambda)z = 0 & L_2 \\ (3\lambda^3 - 30\lambda^2 + 48\lambda)\, z = 0 & L_3 \leftarrow 2\lambda L_3 + (-8+3\lambda) L_2 \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{l} 3x + 2y + (3-\lambda)z = 0 \\ -2\lambda y + (\lambda^2-6\lambda)z = 0 \\ 3\lambda(\lambda^2 - 10\lambda + 16)\, z = 0 \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{l} 3x + 2y + (3-\lambda)z = 0 \\ -2\lambda y + (\lambda^2-6\lambda)z = 0 \\ (\lambda^2 - 10\lambda + 16)\, z = 0 \ \text{ car } \lambda \neq 0 \end{array}$$

Les racines de $\lambda^2 - 10\lambda + 16$ sont 2 et 8.

<u>Si $\lambda = 2$:</u>

$$UX = 2X \iff \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 0 \\ -4y - 8z = 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} x = z \\ y = -2z \end{array}$$

Donc $E_2 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Si $\lambda = 8$:</u>

$$UX = 8X \iff \begin{array}{l} 3x + 2y - 5z = 0 \\ -16y + 16z = 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array}$$

Donc $E_8 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) a) Soient A = ($a_{i,j}$) et B = ($b_{i,j}$) deux matrices de F et α un réel
On a alors : α A + B = (α $a_{i,j}$ + $b_{i,j}$) par définition de la somme et du produit

D'où φ(α A+B) = $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}(\alpha a_{i,j}+b_{i,j})$

$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}\alpha a_{i,j}+(-1)^{i+j}b_{i,j}$

$= \alpha \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}a_{i,j} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}b_{i,j}$ par linéarité des sommes

= α φ(A)+ φ(B)

Donc φ est linéaire.

4) b) On peut constater par exemple que pour tout réel z : $\varphi\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{2+2}$ z = z

Quand z décrit R, l'ensemble des $\varphi\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ décrit donc R.

Cela entraîne que Im(φ) = R

Le thèorème du rang donne ensuite dim(F) = dim(Ker(φ)) + dim(Im(φ))
3 = dim(Ker(φ)) + 1

Donc dim(Ker(φ)) = 2

4) c) Il faut faire la somme des totaux sur les colonnes des coefficients de la matrice ($(-1)^{i+j}m_{i,j}$) où M = ($m_{i,j}$).

Donc φ(M) = (x-y+x)+(-y+z-y)+(x-y+x) = 4x – 4y + z

M = $\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ ϵ Ker(φ) <=> φ(M) = 0 <=> 4x – 4y + z = 0 <=> z = -4x + 4y

<=> M = $\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & -4x+4y & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ <=> M = x $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$+ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Donc Ker(φ) = Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

Les matrices ci-dessus n'étant pas proportionnelles elles forment une famille libre de Ker(φ) et comme c'est une famille génératrice de Ker(φ) c'est donc une base de Ker(φ).

Exercice 3 (EML 2005):

1) (I,J,K) est une famille génératrice de E par construction.

De plus : aI + bJ + cK = O

$$\Leftrightarrow a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<=> a = b = c = 0 ce qui prouve que (I,J,K) est une famille libre.

(I,J,K) est donc une base de E donc dim E = 3

2) On trouve $J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = K$ et $JK = KJ = K^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$

3)a) Soit P(n), la propriété : « $L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K$ »

Initialisation :
P(0) s'écrit « $L^0 = I$ » ce qui est vrai.
Hérédité:
Soit $n \geq 0$, un entier quelconque. Supposons P(n) vraie.

$L^{n+1} = L^n L = \left(I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K\right)(I+J)$ d'après HR

$$= I^2 + IJ + nJI + nJ^2 + \frac{n(n-1)}{2} KI + \frac{n(n-1)}{2} KJ$$

$$= I + J + nJ + nK + \frac{n(n-1)}{2} K + O$$

$$= I + (n+1)J + \frac{(n+1)n}{2} K$$ donc P(n+1) est vraie.

Conclusion: P(n)est vraie pour tout entier $n \geq 0$

Donc pour tout $n \geq 0$: $L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K$

3)b) L = I + J = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est triangulaire sans aucun 0 sur sa diagonale donc inversible

L'égalité $L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K$ a déjà été prouvée pour $n \geq 0$.
Il faut maintenant la prouver pour $n \leq 0$, ce qui revient à prouver que pour tout $n \geq 0$:

$$L^{-n} = I - nJ + \frac{-n(-n-1)}{2} K \qquad [n \rightarrow -n]$$

On a : $L^n \left[I - nJ + \frac{-n(-n-1)}{2} K\right]$

$= \left[I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K\right]\left[I - nJ + \frac{-n(-n-1)}{2} K\right]$

$= I^2 - nIJ + \frac{-n(-n-1)}{2} IK + nJI - n^2J^2 + n \frac{-n(-n-1)}{2} JK + \frac{n(n-1)}{2} KI$

$- \frac{n(n-1)}{2} nKJ + \frac{n(n-1)}{2} \frac{-n(-n-1)}{2} K^2$

$= I - nJ + \frac{-n(-n-1)}{2} K + nJ - n^2K + O + \frac{n(n-1)}{2} K - O + O$

$= I$

Donc $(L^n)^{-1} = I - nJ + \frac{-n(-n-1)}{2} K$ mais comme $(L^n)^{-1} = L^{-n}$ cela prouve le résultat.

En conclusion : $L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K$ pour tout entier relatif n.

3c) On a J = L – I et $L^2 = I + 2J + K$ d'après 3b) avec n=2.
Donc $K = L^2 - I - 2J = L^2 - I - 2(L - I) = I - 2L + L^2$
En remplaçant dans 3)b), on obtient :

$$L^n = I + n(L - I) + \frac{n(n-1)}{2} (I - 2L + L^2)$$

Soit $L^n = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} I + (2n - n^2) L + \frac{n(n-1)}{2} L^2$

4) Soit λ constante réelle quelconque.
Transformons A - λI en la matrice de Gauss G_λ .

$$A - \lambda I = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & -3 & 3-\lambda \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & 2\lambda-3 & 1-\lambda \\ 0 & 4-3\lambda & -\lambda^2+3\lambda-2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \rightarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \rightarrow \lambda L_1 + 2L_3 \end{matrix}$$

Pour éliminer 4-3λ, il faudrait faire L_3 →(4-3λ) L_2 - (2λ-3) L_3 ce qui n'est autorisé que si (2λ-3) ≠ 0 et obligerait à une discussion sur λ.
D'où la combinaison linéaire qui suit pour faire disparaître le λ du pivot de la 2ième ligne.

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & -1 & -2\lambda^2+3\lambda-1 \\ 0 & 4-3\lambda & -\lambda^2+3\lambda-2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \rightarrow 3L_2 + 2L_3 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & -1 & -2\lambda^2+3\lambda-1 \\ 0 & 0 & 6\lambda^3-18\lambda^2+18\lambda-6 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \rightarrow (4-3\lambda) L_2 + L_3 \end{matrix}$$

Donc $G_\lambda = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & -1 & -2\lambda^2+3\lambda-1 \\ 0 & 0 & 6(\lambda-1)^3 \end{bmatrix}$

A - λI non inversible <=> G_λ non inversible <=> λ = 1

Donc <u>A admet comme seule valeur propre 1</u>.

Si f était diagonalisable, sa matrice dans la base de vecteurs propres serait $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ = I

La formule de passage donnerait alors A = P I P^{-1} = I ce qui est absurde.

Donc <u>f n'est pas diagonalisable</u>.

5)a) La matrice colonne V associée à v est donnée par :

V=(A – I)W= $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

D'où V= $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ donc v = (-1,1,2)

La matrice colonne U associée à u est donnée par U=(A – I)V= $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

D'où U= $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ donc u = (1,0,-1)

au + bv + cw = 0 <=> a(1,0,-1) + b(-1,1,2) + c(1,0,0) = (0,0,0)

$$<=> \begin{cases} a & -b & +c & = & 0 \\ & b & & = & 0 \\ -a & +2\mathrm{b} & & = & 0 \end{cases}$$

<=> a = b = c = 0

Donc (u,v,w) est une famille libre de 3 vecteurs dans l'espace R^3 de dimension 3 donc (u,v,w) est une base de R^3 .

5)b) Les égalités v = (f – e)(w) et u = (f – e)(v) donnent respectivement :
f(w) = v + w et f(v) = u + v

De plus : AU = $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ = U ce qui signifie que f(u) = u

On déduit que $M_{(u,v,w)}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

NB : on peut aussi raisonner avec les formules de changement de passage, mais c'est plus long! $M_{(u,v,w)}(f) = P^{-1} \quad M_B(f) \; P$ *où B est la base canonique de* R^3 *, P la matrice de passage de B à (u,v,w)*

Avec P = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ *et il reste à calculer* P^{-1} *et faire les produits …*

5)c) $M_{(u,v,w)}(f)$ = L qui est inversible. Donc f est un automorphisme de R^3 .

On a : $L^n = \frac{n^2-3\mathrm{n}+2}{2}$ I + (2n – n²) L + $\frac{n(n-1)}{2}$ L²

Donc $f^n = \frac{n^2-3\mathrm{n}+2}{2}$ e + (2n – n²) f + $\frac{n(n-1)}{2}$ f²