TD0 - Systèmes linéaires

Exercice 1 ★ ☆ ☆☆

Résoudre le système triangulaire $(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & - & 2z & = & -4. \\ & & & & 4z & = & 4 \end{array}\right.$

Exercice 2 ★ ☆ ☆☆

Résoudre par Gauss le système $(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & 13y & - & 7z & = & -1. \\ x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$

Exercice 3 ★ ☆ ☆☆

Résoudre par substitution le système $(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & & & - & 2z & = & -1. \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \end{array}\right.$

Exercice 4 ★ ☆ ☆☆

Résoudre le système $(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 5x & + & 2y & + & 3z & = & -2 \\ 2x & - & 2y & + & 5z & = & 0 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & = & -10 \end{array}\right.$

Exercice 5 ★ ☆ ☆☆

Résoudre le système $(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & -5 \\ 2x & + & 13y & - & 7z & = & -1 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$

Exercice 6 ★ ☆ ☆☆

Résoudre le système $(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 9 \\ 3x & - & 5y & + & z & = & -4 \\ 4x & - & 7y & + & z & = & 5 \end{array}\right.$

Exercice 7 ★ ★ ☆☆

Résoudre le système $(S)\left\{\begin{array}{lc} 2x-y+z & =1 \\ x-y-3z & =2. \end{array}\right.$

Exercice 8 ★ ★ ☆☆

Résoudre le système $(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & -1 \end{array}\right.$

Exercice 9 ★ ★ ☆☆

Résoudre le système $(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & - & z & + & t & = & 3 \\ 2x & + & y & - & 3z & + & t & = & 2 \\ x & - & y & + & z & + & 2t & = & -2 \\ x & + & 2y & + & z & - & t & = & 4 \end{array}\right.$

Exercice 10 ★ ☆ ☆☆

Résoudre le système $\left\{\ 2x-3y+z=0.\right.$

Exercice 11 ★ ★ ★☆

Résoudre en discutant suivant la valeur du paramètre réel λ le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \\ & & (2-\lambda)y & + & \lambda z & = & 0 \\ & & & & (\lambda^2-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

Indications / Réponses

Exercice 1

$$(S) \iff \begin{cases} 2x+y+1 &= 1 \\ -y-2 &= -4 \\ z &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+3 &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -1 \\ y &= 2 \\ z &= 1 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{(-1;2;1)\}$.

Exercice 2

$$(S)\begin{cases} 2x + y + z = 5 & L_1 \\ 2x + 13y - 7z = -1 & L_2 \\ x - y + z = 1 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = 5 & L_1 \\ -12y + 8z = 6 & L_2 \longleftarrow L_1 - L_2 \\ x - y + z = 1 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = 5 & L_1 \\ -12y + 8z = 6 & L_2 \\ 3y - z = 3 & L_3 \longleftarrow L_1 - 2L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = 5 & L_1 \\ -12y + 8z = 6 & L_2 \\ 4z = 18 & L_3 \longleftarrow L_2 + 4L_3 \end{cases}$$

Système triangulaire. On trouve $\mathscr{S} = \{(-1;5/2;9/2)\}$.

Exercice 3

Le système comporte « un trou » dans la deuxième équation. On peut exprimer x en fonction de z et le substituer dans la première et troisième équation.

$$(S) \iff \begin{cases} (2z-1) - y + z &= 0 & L_1 \\ x &= 2z-1 & L_2 \\ 2(2z-1) + y - z &= 3 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -y+3z &= 1 & L_1 \\ x &= 2z-1 & L_2 \\ y+3z &= 5 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -y+3z &= 1 & L_1 \\ x &= 2z-1 & L_2 \\ 6z &= 6 & L_3 \longleftarrow L_1 + L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2 \\ x = 1. \\ z = 1 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{(1;2;1)\}$.

Exercice 4

$$\begin{cases} 5x+2y+3z &= -2 & L_1 \\ 2x-2y+5z &= 0 & L_2 \\ 3x+4y+2z &= -10 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+2y+3z = -2 \ L_1 \\ 14y-19z = -4 \quad L_2 \leftarrow 2L_1 - 5L_2 \\ -14y - z = 44 \quad L_3 \leftarrow 3L_1 - 5L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+2y+3z=-2 & L_1 \\ 14y-19z=-4 & L_2 \\ -20z=40 & L_3 \leftarrow L_2+L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+2y-6=-2 \\ 14y+38=-4 \\ z=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=-2 \end{cases}$$

Donc $\mathscr{S}=\{(2;-3;-2)\}$.

<u>Exercice 5</u>

$$(S)\begin{cases} 2x+y+z=-5 & L_1 \\ 2x+13y-7z=-1 & L_2 \\ x-y+z=1 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=-5 & L_1 \\ 12y-8z=4 & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ 3y-z=-7 & L_3 \leftarrow L_1-2L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=-5 & L_1 \\ 12y-8z=4 & L_2 \\ -4z=32 & L_3 \leftarrow L_2-4L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-8=-5 \\ 12y+64=4 \\ z=-8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \\ z=-8 \end{cases}$$

Donc $\mathscr{S}=\{(4;-5;-8)\}$.

<u>Exercice 6</u>

$$\begin{cases} 2x-y+3z & =9 & L_1 \\ 3x-5y+z & =-4 & L_2 \\ 4x-7y+z & =5 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+3z & =9 & L_1 \\ 7y+7z & =35 & L_2 \leftarrow 3L_1-2L_2 \\ 5y+5z & =13 & L_3 \leftarrow 2L_1-L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+3z & =9 & L_1 \\ 7y+7z & =35 & L_2 \\ 0z & =84 & L_3 \leftarrow 5L_2-7L_3 \end{cases}$$

La dernière équation est impossible.

Donc $\mathscr{S}=\varnothing$.

Exercice 7

On choisit de prendre x, y ou z comme paramètre et on le passe dans le membre de droite, comme si c'était une constante, ce qui permet de traiter le système comme s'il y avait 2 équations et 2 inconnues.
Prenons par exemple z comme paramètre.

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} 2x - y & = 1 - z & L_1 \\ x - y & = 2 + 3z & L_2 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} 2x - y & = 1 - z & L_1 \\ x & = -1 - 4z & L_2 \longleftarrow L_1 - L_2 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2(-1 - 4z) - y & = 1 - z \\ x & = -1 - 4z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} y & = -3 - 7z \\ x & = -1 - 4z \end{array} \right.$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{(-1 - 4z; -3 - 7z; z)\ , z \in \mathbf{R}\}$.

Exercice 8

$$\left\{ \begin{array}{lll} x + y - z & = 2 & L_1 \\ 2x + 3y + 2z & = 1 & L_2 \\ x + 2y + 3z & = -1 & L_3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x + y - z & = 2 & L_1 \\ y + 4z & = -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ y + 4z & = -3 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x + y - z & = 2 & L_1 \\ y + 4z & = -3 & L_2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x + (-4z - 3) - z & = 2 \\ y & = -4z - 3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = 5z + 5 \\ y & = -4z - 3 \end{array} \right.$$

Donc $\mathscr{S} = \{(5z + 5; -4z - 3; z),\ z \in \mathbf{R}\}$.

Exercice 9

$$\begin{cases} x+3y-z+t &= 3 \quad L_1 \\ 2x+y-3z+t &= 2 \quad L_2 \\ x-y+z+2t &= -2 \quad L_3 \\ x+2y+z-t &= 4 \quad L_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-z+t=3 & L_1 \\ 5y+z+t=4 & L_2 \leftarrow 2L_1-L_2 \\ 4y-2z-t=5 & L_3 \leftarrow L_1-L_3 \\ y-2z+2t=-1 & L_4 \leftarrow L_1-L_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-z+t=3 & L_1 \\ y-2z+2t=-1 & L_2 \leftrightarrow \ L_4 \\ 4y-2z-t=5 & L_3 \\ 5y+z+t=4 & L_4 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-z+t=3 & L_1 \\ y-2z+2t=-1 & L_2 \\ 6z-9t=9 & L_3 \leftarrow L_3-4L_2 \\ 11z-9t=9 & L_4 \leftarrow L_4-5L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-z+t=3 & L_1 \\ y-2z+2t=-1 & L_2 \\ 6z-9t=9 & L_3 \\ 5z=0 & L_4 \leftarrow L_4-L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+t=3 \\ y+2t=-1 \\ -9t=9 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-1=3 \\ y-2=-1 \\ t=-1 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ t=-1 \\ z=0 \end{cases}$$

Donc $\mathscr{S} = \{(1;1;0;-1)\}$.

Remarques :

L'opération $L_2 \leftrightarrow \ L_4$ permet d'avoir à l'étape suivante un pivot simple (1 en l'occurence pour le coefficient de y) et simplifie les opérations.

L'opération $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$ bien que ne menant pas à un système triangulaire est plus simple que $L_4 \leftarrow 11L_3 - 6L_4$ possible également.

Exercice 10

On exprime z en fonction de x et y.

On obtient : $\{ \ z = -2x + 3y$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \left\{(x;y;-2x+3y),\ (x,y) \in \mathbf{R}^2\right\}$.

Exercice 11

C'est un système triangulaire.

La dernière équation donne : $z = \frac{0}{\lambda^2-\lambda}$, mais ceci n'est valide que si $\lambda^2 - \lambda \neq 0$.

Il faut donc faire une discussion sur λ.

1)Premier cas : $\lambda^2 - \lambda = 0$

$\lambda^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \ ou \ \lambda = 1$.

Ceci amène à considérer deux sous-cas :

• $\lambda = 1$

Le système initial est équivalent à :

$$\begin{cases} x - y & = 0 \\ y + z & = 0 \\ 0z & = 0 \ (toujours\ vrai!) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

Donc $\mathscr{S} = \{(-z; -z; z),\ z \in \mathbf{R}\}$.

• $\lambda = 0$

Le système initial est équivalent à :

$$\begin{cases} x - y + z & = 0 \\ 2y = 0 & \\ 0z & = 0 \ (toujours\ vrai!) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc $\mathscr{S} = \{(-z; 0; z),\ z \in \mathbf{R}\}$.

2)Deuxième cas : $\lambda \neq 0 \ et \ \lambda \neq 1$

Le système initial est équivalent à :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ (2 - \lambda)y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation amène à distinguer deux sous-cas.

• $\lambda = 2$

Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 0y = 0 \ (toujours\ vrai) \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc $\mathscr{S} = \{(y; y; 0),\ y \in \mathbf{R}\}$.

• $\lambda \neq 2 \ et \ \lambda \neq 0 \ et \ \lambda \neq 1$

Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc $\mathscr{S} = \{(0; 0; 0)\}$.