ECRICOME Mathématiques voie économique 2013

EXERCICE 1

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels et par O_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ainsi que le polynôme R défini par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $R(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

Pour tout réel λ, on pose $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.

Pour finir, on introduit l'application f définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(M) = AM + MA$.

1. Montrer que R' (la dérivée de R) admet deux racines réelles distinctes r_1, r_2 avec $r_1 < r_2$ que l'on précisera.
2. Dresser le tableau de variations de R en y ajoutant les valeurs de R en r_1 et r_2 .
3. Justifier que R admet trois racines a, b, c avec$0 < a < r_1 < b < r_2 < c$.
   On ne cherchera pas à calculer ces racines.
4. Soit λ un réel, calculer AX_λ puis démontrer que X_λ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ si et seulement si $R(\lambda) = 0$.
5. Établir l'existence d'une matrice inversible P et d'une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
   Expliciter les matrices P et D en fonction des réels a, b, c .
6. Prouver que f est une application linéaire et que :

   $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(M) = O_3 \iff DM' + M'D = O_3$ où l'on a posé $M' = P^{-1}MP$.
7. Soit $N = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}$. Déterminer les neuf coefficients de la matrice $DN + ND$. Que dire de N si $DN + ND = O_3$?
8. Démontrer que f est un isomorphisme.

EXERCICE 2

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \dfrac{x\ln(x) - 1}{x}$,

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$\forall (x; y) \in]0; +\infty[\times]0; +\infty[$, $f(x; y) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{2} + \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ où exp désigne la fonction exponentielle.

I. Étude des zéros de φ.

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.
   Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de φ en faisant apparaitre les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. Prouver l'existence d'un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\varphi(\alpha) = 0$. Justifier que $\alpha \in [1; e]$.

II. Étude d'une suite réelle.

On considère la suite u définie par la relation de récurrence suivante : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & e \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & \varphi(u_n) + u_n \end{array}\right.$

1. Démontrer que pour tout entier n, u_n existe et $u_n > \alpha$.
2. Si cette suite est convergente de limite L, que peut valoir L ?
3. Prouver que la suite u est strictement croissante.
4. La suite u est-elle convergente ?
5. Soit A un réel. Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant A$

```
import numpy as np
def phi(x):
    y=...............
    return y
A=float(input("entrer un réel A>0"))
u=np.exp(1)
n=0
while ............ :
    ...............
    ...............
print(........)
```

III. Extrema de f sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.

1. Justifier que f est de classe C^2 sur l'ouvert $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.
2. Calculer les dérivées partielles premières de f et prouver que f possède un unique point critique noté A d'abscisse α : et d'ordonnée y_α à déterminer en fonction deα .
3. Calculer les dérivées partielles secondes de f sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$. et établir que $\partial^2_{1,1} f(\alpha, y_\alpha) = \dfrac{2\alpha+1}{\alpha^5}$.
4. La fonction f présente-t-elle un extrémum local en A sur l'ouvert $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$? Si oui, en donner sa nature (maximum ou minimum).

EXERCICE 3

Soient n et b deux entiers avec $n \geqslant 1$ et $b \geqslant 2$. On considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches, toutes indiscernables.
Un joueur A effectue des tirages successifs d'une boule **sans remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
Il laisse alors la place au joueur B qui effectue des tirages successifs d'une boule **avec remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par A avant de tirer une boule blanche et on appelle Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par B avant de tirer une boule blanche (s'il ne reste plus de boule noire, on a donc $Y = 0$).
Par exemple, si $n = 3$ et $b = 7$ et que les tirages successifs ont donné une boule : « noire, blanche, noire, noire, noire, noire, blanche » alors :

- A a effectué deux tirages, il a retiré une boule noire puis une boule blanche de l'urne ;
- l'urne contient maintenant 8 boules dont deux noires et six blanches ;
- B a effectué ensuite cinq tirages dans cette urne, il a pioché 4 boules noires qu'il a reposé dans l'urne après chaque tirage puis il a pioché une boule blanche ;
- X vaut 1 et Y vaut 4.

I. Étude d'un cas particulier $b = n = 2$.

Pour ce cas particulier on pourra s'aider d'un arbre pondéré.
On suppose donc ici que l'urne contient initialement 2 boules blanches et 2 boules noires.

1. Donner les probabilités des évènements : $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$.
2. En déduire l'espérance et la variance de X.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement $[Y = 0]$est donnée par : $P([Y = 0]) = \dfrac{1}{2}$

4. Pour tout entier i naturel non nul, déterminer les probabilités suivantes :

   $P([X=0]\cap[Y=i])$, $P([X=1]\cap[Y=i])$, $P([X=2]\cap[Y=i])$.
5. En déduire la loi de Y.

   Uniquement à l'aide de l'expression de $P([Y=i])$ en fonction de i, vérifier que : $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P([Y=i])=1$.
6. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

II. Retour au cas général.

1. Pour t.out $k\in\{1;\ldots;n\}$ calculer la probabilité $P([X=k])$ puis vérifier que : $P([X=k])=\dfrac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}$.
2. Utiliser la question qui précède pour justifier que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k+b-1}{b-1}=\binom{n+b}{b}$.

   Par conséquent on vient de démontrer la formule suivante : $\boxed{(\mathcal{S})\qquad \forall N\in\mathbb{N},\ \forall a\in\mathbb{N},\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{N}\binom{k+a}{a}=\binom{N+a+1}{a+1}}$.
3. Soient $k\geqslant 1$, $N\geqslant 1$ et $a\in\mathbb{N}$. Comparer $k\binom{k+a}{a}$ et $(a+1)\binom{k+1}{a+1}$ puis justifier que :
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a}=(a+1)\sum_{k=0}^{N-1}\binom{k+a+1}{a+1}$.
4. À l'aide des questions précédentes, montrer que l'espérance de la variab1e $n-X$ est donnée par :

   $E(n-X)=\dfrac{nb}{b+1}$. En déduire l'espérance $E(X)$ de X .
5. Pour tout k de $X(\Omega)$, et pour tout entier i non nul, déterminer la probabilité suivante : $P([X=k]\cap[Y=i])$.
6. Pour tout k de $X(\Omega)$, et pour tout entier i, non nul, justifier que la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 1} i\left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i-1}$ est convergente et déterminer sa somme.
7. Montrer que Y admet une espérance et vérifier que : $E(Y)=\dfrac{bn}{b^2-1}$.