Chapitre 9 : intégrales impropres

On s'intéresse aux intégrales dont l'intervalle d'intégration n'est pas un segment.

I)Généralités

Dans tout le paragraphe, a et b désignent des réels avec $a < b$.

Déf : on dit qu'une intégrale est impropre en $+\infty$ si elle est du type $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ où f une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

On dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)$ existe et est finie.

On pose alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right).$$

<u>Exercice 1</u>

Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

Déf : on dit qu'une intégrale est impropre en $-\infty$ si elle est du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ où f une fonction continue sur $]-\infty, b]$.

On dit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)$ existe et est finie.

On pose alors :

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty}\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right).$$

<u>Exercice 2</u>

Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^t\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

Déf : on dit qu'une intégrale est impropre en sa borne supérieure b si elle est du type $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue sur $[a, b[$.

On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to b^-}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)$ existe et est finie.

On pose alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right).$$

<u>Exercice 3</u>

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t-1)^2}\mathrm{d}t$ diverge.

Déf : on dit qu'une intégrale est impropre en sa borne inférieure a si elle est du type $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue sur $]a,b]$.

On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)$ existe et est finie.

On pose alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a^+}\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)$.

<u>Exercice 4</u>

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

> Remarque
>
> Si f est continue sur le segment $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ n'est pas impropre.

II)Intégrale doublement impropre

Dans tout le paragraphe, a et b désignent des réels.

Déf : on dit qu'une intégrale est doublement impropre en a et en $+\infty$ si elle est du type $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ où f une fonction continue sur $]a,+\infty[$.

On dit que l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge s'il existe un réel $c\in]a,+\infty[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ convergent.

On pose alors : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

<u>Exercice 5</u>

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$ converge et la calculer.

Déf : on dit qu'une intégrale est doublement impropre en $-\infty$ et en b si elle est du type $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\mathrm{d}t$ où f une fonction continue sur $]-\infty,b[$.

On dit que l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\mathrm{d}t$ converge s'il existe un réel $c\in]-\infty,b[$ tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent.

On pose alors : $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$.

<u>Exemple</u>

$\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{e^t}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$.

Déf : on dit qu'une intégrale est doublement impropre en $-\infty$ et en $+\infty$ si elle est du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ où f une fonction continue sur $\mathbf{R}$.

On dit que l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge s'il existe un réel $c \in \mathbf{R}$ tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ convergent.

On pose alors : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{c} f(t)\mathrm{d}t + \int_{c}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Exemple

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$.

Remarque

Les intégrales doublement impropres du type $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ où f une fonction continue sur $]a, b[$ sont hors programme.

Exemple : $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{t(t-1)}\mathrm{d}t$.

Déf : on dit qu'une intégrale doublement impropre diverge si « en la coupant en deux », l'une au moins des deux intégrales impropres obtenues est divergente.

Exercice 6

Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t$ diverge.

III)Propriétés

Dans ce paragraphe, on suppose $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

$\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{a}^{b} g(t)\mathrm{d}t$ sont des intégrales impropres ou doublement impropres.

Propriété 1 (Chasles)

$\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ converge $\iff \exists c \in \,]a, b[\,,\ \displaystyle\int_{a}^{c} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ convergent.

Auquel cas, pour tout réel $c \in]a, b[$, $\displaystyle\int_{a}^{c} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ convergent et on a :

$$\int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a}^{c} f(t)\mathrm{d}t + \int_{c}^{b} f(t)\mathrm{d}t.$$

Propriété 2 (positivité)

Si $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ converge et si $\forall t \in \,]a, b[\,,\ f(t) \geq 0$, alors $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t \geq 0$.

Propriété 3 (linéarité)
Soient α et β des réels.
Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergent, alors $\int_a^b \big(\alpha f(t)+\beta g(t)\big)\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b \big(\alpha f(t)+\beta g(t)\big)\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \beta\int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Propriété 4 (croissance)
Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergent et si $\forall t \in \left]a,b\right[,\ f(t)\geq g(t)$, alors on a :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Propriété 5 (inégalité triangulaire)
Si $\int_a^b \big|f(t)\big|\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge et

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b \big|f(t)\big|\mathrm{d}t.$$

Déf : si $\int_a^b \big|f(t)\big|\mathrm{d}t$ converge, on dit que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

IV)Intégrales de référence

Déf : soit α, une constante réelle.
On appelle intégrale de Riemann de paramètre α, toute intégrale de l'une des deux formes suivantes :

- $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ avec $a \in \left]0,+\infty\right[$,
- $\int_0^b \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ avec $b \in \left]0,+\infty\right[$.

Dans sa première forme, l'intégrale de Riemann est impropre en $+\infty$, dans sa deuxième forme, elle est impropre en 0.

> Remarque
> Dans la majorité des cas, $a = 1$ et $b = 1$.

Théorème 1
Soit α, une constante réelle. Soient a et b deux réels strictement positifs.

1) $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.

2) $\int_0^b \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge $\Longleftrightarrow \alpha < 1$.

Exercice 7

Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ en fonction de $\alpha > 1$.

Exercice 8

Calculer $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ en fonction de $\alpha < 1$.

Propriété 6

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$ converge $\iff \lambda > 0$.

Exercice 9

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$ en fonction de $\lambda > 0$.

V)Intégration par parties

Il est interdit de faire une intégration par parties dans un intégrale impropre.
Il faut se ramener à l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Exercice 10

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-2t}\mathrm{d}t$ converge et préciser sa valeur.

VI)Changement de variable

Il est interdit de faire un changement de variable dans un intégrale impropre.
Il faut se ramener à l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Exercice 11

Montrer que $I = \displaystyle\int_{1/2}^{1} \ln(2t-1)\mathrm{d}t$ converge et préciser sa valeur.

Propriété 7

Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$.

1)Si f est paire et si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

De plus, on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

2)Si f est impaire et si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

De plus, on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 12

Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge et préciser sa valeur.

Exercice 13

Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\mathrm{d}t$ converge et préciser sa valeur.

VII)Critères de convergence des intégrales impropres de fonctions positives

Dans ce paragraphe, on suppose $a < b \leq +\infty$.

$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale impropre en sa borne supérieure b.

Théorème 2 (critère de comparaison)
Soient f et g deux fonctions positives telles que $\forall t \in [a, b[\,,\ f(t) \leq g(t)$.

1)Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

2)Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge.

<u>Exercice 14</u>
Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{1+\ln t + t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 3 (critère de négligeabilité)
Soient f et g deux fonctions positives telles que $f(t) \underset{b}{=} o\big(g(t)\big)$.

1)Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

2)Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge.

<u>Exercice 15</u>
Montrer que $e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ puis étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Théorème 4 (critère d'équivalence)
Soient f et g deux fonctions positives telles que $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$.

Alors, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

<u>Exercice 16</u>

Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\mathrm{d}t$.

<u>Exercice 17</u>

Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$.

> Remarque
> Les théorèmes précédents s'appliquent et s'adaptent par symétrie à une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ impropre en sa borne inférieure a, où $-\infty \leq a < b$.