
DM9
à rendre le lundi / /

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ la suite définie la donnée de $U_0 \geq 0$ et par la relation $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1) Montrer que $\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

2) En étudiant les variations de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$, montrer que l'équation $f(x) = x$ a une seule solution α sur \mathbf{R}_+ .

Donner une valeur approchée de α à 0.1 près.

3) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, U_n \geq 0$.

4) Dédurre des questions précédentes que $\forall n \in \mathbf{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} |U_n - \alpha|$.

5) Conclure que $\forall n \in \mathbf{N} : |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n |U_0 - \alpha|$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 2

Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt.$$

1) Montrer que φ est bien définie sur \mathbf{R} .

2) Etablir que φ est impaire.

3) Montrer que φ est de classe C^1 sur \mathbf{R} et que $\forall x \in \mathbf{R}, \varphi'(x) = \frac{2\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 1}}{\sqrt{4x^2 + 1}\sqrt{x^2 + 1}}$.

indication : introduire une primitive F de $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$.

4) a) En utilisant que $\forall t \geq 0, t^2 \leq t^2 + 1 \leq (t+1)^2$, montrer que

$$\forall x > 0, \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq \varphi(x) \leq \ln 2.$$

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

c) Dresser le tableau de variations complet de φ .

d) Résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$.