Correction DM14 cubes

<u>Exercice 1 :</u> (ecricome 2014 - option math appro)

1)$S \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et admet n valeurs propres distinctes. Donc S est diagonalisable.

Il existe donc une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ diagonale telles que $S = PDP^{-1}$, c'est-à-dire $P^{-1}SP = D$.

2)a)Pour tous polynômes T_1 et T_2, pour tout réel a, on a :

$$\begin{aligned}
f(aT_1 + T_2) &= \left((aT_1+T_2)({\lambda_1}^k), \dots, (aT_1+T_2)(\lambda_n^k)\right)\\
&= \left(aT_1({\lambda_1}^k) + T_2({\lambda_1}^k), \dots, aT_1(\lambda_n^k) + T_2(\lambda_n^k)\right)\\
&= a\left(T_1({\lambda_1}^k), \dots, T_1(\lambda_n^k)\right) + \left(T_2({\lambda_1}^k), \dots, T_2(\lambda_n^k)\right)\\
&= af(T_1) + f(T_2).
\end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

Soit $T \in Kerf$. On a alors $f(T) = 0$, c'est-à-dire $\forall i \in [\![1,n]\!],\ T(\lambda_i^k) = 0$.

Comme k est impair, la fonction $x \mapsto x^k$ est bijective.
Les λ_i étant distincts deux à deux, les λ_i^k le sont alors aussi.

Le polynôme T admet alors n racines distinctes $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$, alors que son degré est inférieur ou égal à $n-1$. Cela impose que T est le polynôme nul.

On vient de prouver que $Kerf \subset \{0\}$, d'où $Kerf = \{0\}$. f est donc injective.

Enfin, E et $\mathbf{R}^n$ étant de dimension n, l'injectivité de f entraîne sa bijectivité.

f est une application linéaire bijective, c'est-à-dire un isomorphisme.

b)$f : E \longrightarrow \mathbf{R}^n$ étant bijective, le n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ admet un unique antécédent $U \in E$. On a alors $f(U) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, c'est-à-dire :

$U({\lambda_1}^k) = \lambda_1$, $U({\lambda_2}^k) = \lambda_2$, ..., $U({\lambda_n}^k) = \lambda_n$.

3)• Posons $U(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ et $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

$$\begin{aligned}
U(D^k) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i D^{ki}\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a_i\ diag\left(\lambda_1^{ki}, \dots, \lambda_n^{ki}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} diag\left(a_i\lambda_1^{ki}, \dots, a_i\lambda_n^{ki}\right)\\
&= diag\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i\lambda_1^{ki}, \dots, \sum_{i=0}^{n-1} a_i\lambda_n^{ki}\right)\\
&= diag\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i\left(\lambda_1^k\right)^i, \dots, \sum_{i=0}^{n-1} a_i\left(\lambda_n^k\right)^i\right)\\
&= diag\left(U({\lambda_1}^k), \dots, U({\lambda_n}^k)\right)\\
&= diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{d'après } 2)b)\\
&= D.
\end{aligned}$$

On a : $U\left(D^k\right) - D = 0$, soit $R(D) = 0$. Donc R est un polynôme annulateur de D.

• Posons $R(X) = \sum_{i=0}^{p} b_i X^i$.

$$\begin{aligned}
R(S) &= \sum_{i=0}^{p} b_i S^i \\
&= \sum_{i=0}^{p} b_i \left(PDP^{-1}\right)^i \\
&= \sum_{i=0}^{p} b_i PD^i P^{-1} \quad \text{récurrence facile} \\
&= P\left(\sum_{i=0}^{p} b_i D^i\right) P^{-1} \\
&= PR(D)P^{-1} = 0.
\end{aligned}$$

4)a)Soit $\mathscr{P}(p)$ la proposition : « $AS^{pk} = S^{pk}A$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $AS^0 = S^0 A$ », ce qui est vrai puisque $S^0 = I$.

Soit $p \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(p)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
AS^{(p+1)k} &= AS^{pk+k} \\
&= AS^{pk} S \\
&= S^{pk} AS^k \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= S^{pk} S^k A \quad \text{car par hypothèse, } A \text{ et } S^k \text{ commutent} \\
&= S^{(p+1)k} A.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall p \in \mathbf{N},\ AS^{pk} = S^{pk} A$.

b)Posons $U(X) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p X^p$.

$$\begin{aligned}
AS &= AU\left(S^k\right) \quad \text{car } R \text{ est un polynôme annulateur de } S \\
&= A\sum_{p=0}^{n-1} \left(S^k\right)^p \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} AS^{pk} \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} S^{pk} A \quad \text{grâce à 4)a)} \\
&= \left(\sum_{p=0}^{n-1} a_p \left(S^k\right)^p\right) A \\
&= U\left(S^k\right) A \\
&= SA.
\end{aligned}$$

5)a)λ est valeur propre de S
$\Longleftrightarrow S-\lambda I$ n'est pas inversible
$\Longleftrightarrow det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$
$\Longleftrightarrow (-\lambda)\times(-\lambda) - 1\times 1 = 0$
$\Longleftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0$
$\Longleftrightarrow \lambda = \pm 1.$
Donc $sp(S) = \{-1, 1\}$.
b)$AS = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq SA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Donc A et S ne commutent pas.
Enfin, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a :
$AS^{2k} = A\left(S^2\right)^k = AI^k = A = I^kA = \left(S^2\right)^k A = S^{2k}A.$
Donc A commute avec toute puissance paire de S.

Exercice 2 (edhec 2018 option maths appro)

1)$\forall x \in \mathbf{R},\ -x \in \mathbf{R}$ et $f(-x) = \dfrac{2}{(e^{-x}+e^{x})^2} = f(x)$. Donc f est paire.

2)• f est définie sur $\mathbf{R}$.

• $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \geq 0$.

• f est continue sur $\mathbf{R}$ comme inverse, somme et composée de fonctions continues avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

• Soit $A > 0$. Posons $t = e^x$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A \frac{2}{(e^x+e^{-x})^2}dx$.

$t = e^x \Longleftrightarrow x = \underbrace{\ln t}_{\varphi(t)}$.

$x = 0 \Longleftrightarrow t = 1$ et $x = A \Longleftrightarrow t = e^A$.

$\dfrac{2}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{2}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$

$dx = \varphi'(t)dt = \dfrac{1}{t}dt$.

φ est de classe C^1 sur $\left[1, e^A\right]$. La formule du changement de variable donne :

$$\int_0^A \frac{2}{(e^x+e^{-x})^2}dx = \int_1^{e^A} \frac{2}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2} \times \frac{1}{t}dt = \int_1^{e^A} \frac{2t}{(t^2+1)^2}dt = \left[-\frac{1}{t^2+1}\right]_1^{e^A}$$

$$= -\frac{1}{e^{2A}+1} + \frac{1}{2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2}{(e^x+e^{-x})^2}dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

Comme f est paire, on conclut que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge.

De plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)dx = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.

Ainsi, f est une densité de probabilité.

3)a)X possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|xf(x)\right|dx$ converge, ou encore si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|xf(x)\right|dx$ converge, du fait de la parité de $x \mapsto \left|xf(x)\right|$.

Pour tout $x \geq 0$, on a :

$e^{-x} \geq 0$ donc $e^x + e^{-x} \geq e^x$, puis $\left(e^x+e^{-x}\right)^2 \geq \left(e^x\right)^2 = e^{2x}$.

Par inverse, $\dfrac{1}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2} \leq \dfrac{1}{e^{2x}}$, d'où $\left|xf(x)\right| \leq 2xe^{-2x}$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} 2xe^{-2x} = \int_0^{+\infty} xg(x)dx = E(Y)$ où $g : x \mapsto 2e^{-2x}$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(2)$.

Cette intégrale est donc convergente.

Par critère de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|xf(x)\right|dx$ converge. Donc X admet une espérance.

Enfin, $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 0$ car $x \mapsto xf(x)$ est impaire.

3)b)En reprenant la même démarche que la question précédente, on a :
$\forall x \geq 0,\ \left|x^2 f(x)\right| \leq 2x^2 e^{-x}$.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x} dx$ converge car c'est l'intégrale définissant $E\left(Y^2\right)$.
Par critère de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|x^2 f(x)\right| dx$ converge.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|x^2 f(x)\right| dx$ converge par parité de $x \mapsto \left|x^2 f(x)\right|$.

Donc X^2 possède une espérance, puis X admet une variance d'après Koënig.

4)Comme f est continue sur $\mathbf{R}$, F est dérivable sur $\mathbf{R}$.

De plus, $\forall x \in \mathbf{R},\ F'(x) = f(x) = \dfrac{2}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$.

Donc F est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

F est continue (car dérivable) et strictement croisssante sur $\mathbf{R}$.
Elle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $F(\mathbf{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} F(x), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\right[=]-1, 1[$
d'après la propriété d'une fonction de répartition.

5)a)Pour tout x réel, on a :
$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(F(X) \leq x\right)$.
Distinguons plusieurs cas.
• $x \leq 0$
Comme F prend ses valeurs dans $]0,1[$, la variable aléatoire $F(X)$ aussi.
Donc l'événement $(F(X) \leq x)$ est impossible. Donc $F_Y(x) = 0$.

• $x \geq 1$
Comme F prend ses valeurs dans $]0,1[$, l'événement $(F(X) \leq x)$ est certain.
Donc $F_Y(x) = 1$.

• $0 < x < 1$
$F_Y(x) = P\left(X \leq F^{-1}(x)\right) = F\left(F^{-1}(x)\right) = x$.

Finalement, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Donc $Y \hookrightarrow \mathscr{U}\left([0,1]\right)$.

b)Pour tout x réel, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{2}{(e^t + e^{-t})^2} dt$.

Soit $A < 0$. Le changement de variable $u = e^t$ dans $\displaystyle\int_A^x \frac{2}{(e^t + e^{-t})^2} dt$ donne :

$\displaystyle\int_A^x \frac{2}{(e^t + e^{-t})^2} dt = \int_{e^A}^{e^x} \frac{2u}{(u^2+1)^2} du = \left[-\frac{1}{u^2+1}\right]_{e^A}^{e^x} = -\frac{1}{e^{2x}+1} + \frac{1}{e^{2A}+1}$
$\underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{e^{2x}+1} + 1$.

Donc $\forall x \in \mathbf{R},\ F(x) = -\dfrac{1}{e^{2x}+1} + 1 = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

c)Soit $y \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}
y = F(x) &\iff y = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\\
&\iff y\left(e^{2x}+1\right) = e^{2x}\\
&\iff ye^{2x} - e^{2x} = -y\\
&\iff e^{2x}(y-1) = -y\\
&\iff e^{2x} = -\frac{y}{y-1} \quad \text{car } y \neq 1\\
&\iff e^{2x} = \frac{y}{1-y}\\
&\iff 2x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)\\
&\iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y}{1-y}\right).
\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in]0,1[\,,\ F^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.