Exercice 1 (ecricome 2021) **(Original modifié !)**

Partie A :

$$1)\alpha I_3 \in \mathscr{A} \iff \alpha I_3(\alpha I_3+I_3)(\alpha I_3+2I_3)=0_3$$
$$\iff \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)I_3=0_3$$
$$\iff \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)=0$$
$$\iff \alpha=0 \text{ ou } \alpha=-1 \text{ ou } \alpha=-2.$$

2)$-I_3 \in \mathscr{A}$, mais $I_3=-(-I_3)\notin \mathscr{A}$. Donc $\mathscr{A}$ n'est pas stable pour la multiplication externe.
Ainsi, $\mathscr{A}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

3)a)On trouve $BX_1=\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $BX_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

3)b)• $BX_1=-2X_1$ et X_1 est non nul. Donc X_1 est un vecteur propre de B associé à la valeur propre -2.

De même, $BX_2=-X_2$ et X_2 est non nul. Donc X_2 est un vecteur propre de B associé à la valeur propre -1.
• $E_{-2}(B)=\{U\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}),(B+2I_3)U=0\}$.

$$U=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-2}(B)\iff \begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\iff x-y+z=0$$
$$\iff x=y-z.$$

Donc en injectant :

$$E_{-2}(B)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mid x=y-z\right\}=\left\{\begin{pmatrix}y-z\\y\\z\end{pmatrix},(y,z)\in\mathbf{R}^2\right\}$$
$$=\left\{y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},(y,z)\in\mathbf{R}^2\right\}=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Donc $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $E_{-2}(B)$.

Elle est libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de $E_{-2}(B)$.

✓ On retrouve que $X_1\in E_{-2}(B)$.

• $E_{-1}(B) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}), (B+I_3)U = 0\}$.

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(B) \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} & - & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} y & = & z \\ x & = & z \end{array} \right.$$

Donc en injectant :

$$E_{-1}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = z, x = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

$$= \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_{-1}(B)$.

Elle est libre car constituée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_{-1}(B)$.

✓ On retrouve que $X_2 \in E_{-1}(B)$.

3)c)La question précédente donne : $dimE_{-2}(B) + dimE_{-1}(B) = 2 + 1 = 3$.

Comme $B \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$, la somme des dimensions des sous-espaces propres de B ne dépasse pas 3. Ainsi, -1 et -2 sont les seules valeurs propres de B.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de B valant 3, B est diagonalisable, d'après le théorème de réduction.

Il existe donc une matrice D diagonale et une matrice P inversible de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $B = PDP^{-1}$.

Les colonnes de P sont formées des bases des sous-espaces propres de B.

On peut prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La diagonale de P contient les valeurs propres de B rangées dans le même ordre que les colonnes de P, ce qui impose de prendre : $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3)d)• $D(D+I_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Puis, $D(D+I_3)(D+2I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $D \in \mathscr{A}$.

• De l'égalité $D(D+I_3)(D+2I_3) = 0_3$, on déduit en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} :

$PD(D+I_3)(D+2I_3)P^{-1} = 0_3$

$PDI(D+I_3)I(D+2I_3)P^{-1} = 0_3$

$PDP^{-1}P(D+I_3)P^{-1}P(D+2I_3)P^{-1} = 0_3$

$\left[PDP^{-1}\right]\left[P(D+I_3)P^{-1}\right]\left[P(D+2I_3)P^{-1}\right] = 0_3 \qquad (*)$

Simplifions les crochets :

$PDP^{-1} = B$,

$P(D+I_3)P^{-1} = PDP^{-1} + PI_3P^{-1} = B + I_3$,

$P(D+2I_3)P^{-1} = PDP^{-1} + P2I_3P^{-1} = B + 2I_3$.

En reportant dans $(*)$, on a : $B(B+I_3)(B+2I_3) = 0_3$. Donc $B \in \mathscr{A}$.

4)Soit M une matrice diagonalisable de E telle que $sp(M) \subset \{0, -1, -2\}$.
Alors, il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $M = PDP^{-1}$.
Comme M et D sont semblables, elles ont les mêmes valeurs propres.
Donc $sp(D) \subset \{0, -1, -2\}$.
Il en résulte que les éléments diagonaux de D sont dans $\{0, -1, -2\}$.

Posons ensuite $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Alors, $D+I_3 = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 \\ 0 & 0 & c+1 \end{pmatrix}$ et $D+2I_3 = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ 0 & b+2 & 0 \\ 0 & 0 & c+2 \end{pmatrix}$.

On déduit facilement :

$D(D+I_3)(D+2I_3) = \begin{pmatrix} a(a+1)(a+2) & 0 & 0 \\ 0 & b(b+1)(b+2) & 0 \\ 0 & 0 & c(c+1)(c+2) \end{pmatrix}$.

Comme a, b et c sont dans $\{0, -1, -2\}$, on a nécessairement :
$a(a+1)(a+2) = b(b+1)(b+2) = c(c+1)(c+2) = 0$.

Donc $D(D+I_3)(D+2I_3) = 0_3$.

En faisant le même calcul que dans la fin de la question 3)d), on montre que $M(M+I_3)(M+2I_3) = 0_3$, ce qui prouve que $M \in \mathscr{A}$.

Partie B :

5)$M \in \mathscr{A}$ donc $M(M+I_3)(M+2I_3) = 0_3$.
$P(X) = X(X+1)(X+2)$ est donc un polynôme annulateur de M.

Les racines de P sont 0, -1 et -2. Donc $sp(M) \subset \{0, -1, -2\}$.

6)$M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ admet 3 valeurs propres distinctes. Elle est donc diagonalisable grâce au théorème de réduction.

7)a)Comme -1 est l'unique valeur propre de M, les réels 0 et -2 ne sont pas des valeurs propres de M.
Donc M et $M+2I_3$ sont inversibles. [1]

L'égalité $M(M+I_3)(M+2I_3) = 0$ donne en mutipliant à gauche par M^{-1} et à droite par $(M+2I_3)^{-1}$:
$M^{-1}M(M+I_3)(M+2I_3)(M+2I_3)^{-1} = M^{-1}0(M+2I_3)^{-1}$, c'est-à-dire $I(M+I_3)I = 0_3$. Donc $M+I_3 = 0_3$, puis $M = -I_3$.

7)b)Si $sp(M) = \{-2\}$, alors M et $M+I_3$ sont inversibles et par le même raisonnement, on obtient $M = -2I_3$.

Si $sp(M) = \{0\}$, alors $M+I_3$ et $M+2I_3$ sont inversibles et par le même raisonnement, on obtient $M = 0_3$.

8)Comme M n'a pas de valeur propre, 0, -1 et -2 ne sont pas des valeurs propres de M. Donc M, $M+I_3$ et $M+2I_3$ sont inversibles.
Par produit, $M(M+I_3)(M+2I_3)$ est inversible, ce qui est en contradiction avec le fait que $M(M+I_3)(M+2I_3) = 0$.

9)a)0 n'est pas valeur propre de M, donc M est inversible.

$M \in \mathscr{A}$ donc $M(M+I_3)(M+2I_3) = 0_3$.

En multipliant à gauche par M^{-1}, on a :
$M^{-1}M(M+I_3)(M+2I_3) = M^{-1}0_3$, c'est-à-dire $(M+I_3)(M+2I_3) = 0_3$.

On déduit : $(M+2I_3)(M+I_3) = M^2+3M+2I_3 = (M+I_3)(M+2I_3) = 0$.

9)b)-1 est valeur propre de M donc $E_{-1}(M)$ n'est pas nul.
Donc $dimE_{-1}(M) \geq 1$.

-2 est valeur propre de M donc $E_{-2}(M)$ n'est pas nul.
Donc $dimE_{-2}(M) \geq 1$.

9)c)Comme M n'est pas diagonalisable,la somme des dimensions des sous-espaces propres de M est strictement inférieure à 3, grâce au théorème de réduction.
On a donc : $dimE_{-1}(M) + dimE_{-2}(M) \leq 2 \quad (1)$

Par ailleurs, la question 9)b) donne : $dimE_{-1}(M) + dimE_{-2}(M) \geq 2 \quad (2)$

(1) et (2) donnent : $dimE_{-1}(M) + dimE_{-2}(M) = 2$.

1. On rappelle que λ est valeur propre de $M \iff M - \lambda I$ n'est pas inversible

Comme $dimE_{-1}(M) \geq 1$ et $dimE_{-2}(M) \geq 1$, on a nécessairement : $dimE_{-1}(M) = dimE_{-2}(M) = 1$.

9)d)i)(U, V) est une famille de vecteurs propres de A associés à deux valeurs propres différentes, elle est donc libre grâce au cours.

9)d)ii)$W \notin \text{Vect}\,(U, V)$ donc $\text{Vect}\,(U, V)$ est strictement inclus dans $\text{Vect}\,(U, V, W)$, lui-même contenu dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

Donc $dim\text{Vect}\,(U, V) < dim\text{Vect}\,(U, V, W) \leq 3 \quad (*)$.

Or, (U, V) est une famille libre et génératrice de $\text{Vect}\,(U, V)$.
C'est donc une base de $\text{Vect}\,(U, V)$. Ainsi, $dim\text{Vect}\,(U, V) = 2$.

$(*)$ donne alors : $dim\text{Vect}\,(U, V, W) = 3$.

$\text{Vect}\,(U, V, W) \subset \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ et $dim\text{Vect}\,(U, V, W) = dim\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.
Donc $\text{Vect}\,(U, V, W) = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.
(U, V, W) est alors une famille génératrice de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ dont le cardinal coïncide avec la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, c'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

9)d)iii)L'égalité $(M + I_3)(M + 2I_3)W = 0$ montre que $(M + 2I_3)W \in E_{-1}(M)$.
Comme $dimE_{-1}(M) = 1$ et que U est un vecteur non nul de $E_{-1}(M)$, la famille (U) est une base de $E_{-1}(M)$.
Il existe donc $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $(M + 2I_3)W = \alpha U$, c'est-à-dire : $MW + 2W = \alpha U$.

Par le même raisonnement, l'égalité $(M + 2I_3)(M + I_3) = 0$ montre que $(M + I_3)W \in E_{-2}(M)$.
Comme $dimE_{-2}(M) = 1$ et que V est un vecteur non nul de $E_{-2}(M)$, la famille (V) est une base de $E_{-2}(M)$.
Il existe donc $\beta \in \mathbf{R}$ tel que $(M+I_3)W = \beta V$, c'est-à-dire $MW+W = \beta V$.

En soustrayant les deux égalités obtenues ci-dessus, on obtient :
$W = \alpha U - \beta V$, ce qui prouve que W est combinaison linéaire de U et V.
Cela contredit que $W \notin \text{Vect}\,(U, V)$.

10)• La question 4) donne déjà l'implication :
M diagonalisable et $sp(M) \subset \{0, -1, -2\} \Longrightarrow M \in \mathscr{A}$.

• Réciproquement, si $M \in \mathscr{A}$, la question 5) donne : $sp(M) \subset \{0, -1, -2\}$.

La question 8) prouve que M possède au moins une valeur propre.

– si M en admet exactement une, la question 7) prouve que M est colinéaire à I donc diagonale et donc diagonalisable,

– si M admet exactement deux valeurs propres, la question 9) prouve que M est diagonalisable,

– si M admet exactement trois valeurs propres, la question 6) prouve que M est diagonalisable.

Ainsi, on a montré : $M \in \mathscr{A} \Longrightarrow$M est diagonalisable et $sp(M) \subset \{0, -1, -2\}$.

Exercice 2 (ecricome 2021)

Partie A :

1)a)$\lim_{t\to 0}(1+t^n)=1$ donc $1+t^n \underset{0}{\sim} 1$. Par quotient, $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{0}{\sim} \ln t$.

1)b)Pour tout $y\in]0,1]$, on a :

$\displaystyle\int_y^1 \ln(t)dt = [t\ln(t)-t]_y\, 1 = (0-1)-(y\ln(y)-y) = -1+y-y\ln(y)$.

$\lim_{y\to 0^+}(-1+y)=-1$ et $\lim_{y\to 0^+} y\ln(y)=0$ par croissances comparées.

Par différence, $\lim_{y\to 0^+}(-1+y+\ln(y))=-1$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ converge et vaut -1.

1)c)La question 1)a) donne : $-\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{0}{\sim} -\ln(t)$.

De plus, $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)dt$ converge car de même nature que $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$.

D'après le critère d'équivalence sur les intégrales impropres de fonctions positives[2], $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1+t^n}dt$ converge.

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}dt$ converge, ce qui établit la convergence de J_n.

2)a)$1+t^n \underset{+\infty}{\sim} t^n$ donc $t^{3/2}\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{+\infty}{\sim} t^{3/2}\dfrac{\ln(t)}{t^n} = \dfrac{\ln(t)}{t^{n-3/2}}$.

$n\geq 2$ donc $n-3/2>0$. Par croissances comparées, $\lim_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(t)}{t^{n-3/2}}$=0.

Donc $\lim_{t\to+\infty} t^{3/2}\dfrac{\ln(t)}{1+t^n}=0$.

2)b)La question 2)a) établit que $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$.

Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{3/2}}dt$ converge comme intégrale de Riemann de paramètre $\frac{3}{2}>1$.

D'après le critère de négligeabilité des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^n}dt$ converge, ce qui établit la convergence de K_n.

3)Les intégrales J_n et K_n convergent. Par Chasles, I_n converge.

2. notez que $t\mapsto -\ln(t)$ est positive sur $]0,1]$

Partie B :

4)a)Pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel $t \in]0,1]$, on a :
$0 \leq \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leq -t^n \ln(t) \iff 0 \leq \dfrac{-t^n \ln(t)}{1+t^n} \leq -t^n \ln(t)$.
Or, $1+t^n \geq 1$ donc $0 \leq \dfrac{1}{1+t^n} \leq 1$, puis en multipliant membre à membre par le nombre positif $-t^n \ln(t)$: $0 \leq \dfrac{-t^n \ln(t)}{1+t^n} \leq -t^n \ln(t)$.
Donc pour tout $n \geq 2$ et tout $t \in]0,1]$, $0 \leq \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leq -t^n \ln(t)$.

4)b)Effectuons une IPP sur $\displaystyle\int_y^1 -t^n \ln(t)dt$ où $y \in]0,1]$, en posant :

$u'(t) = -t^n \qquad v(t) = \ln(t)$
$u(t) = -\dfrac{t^{n+1}}{n+1} \qquad v'(t) = \dfrac{1}{t}$.

u et v sont de classe C^1 sur $[y,1]$. L'IPP est licite et donne :

$$\begin{aligned}\int_y^1 -t^n \ln(t)dt &= \left[-\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\right]_y^1 - \int_y^1 -\frac{t^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{t}dt \\ &= 0 + \frac{y^{n+1}}{n+1}\ln(y) + \frac{1}{n+1}\int_y^1 t^n dt \\ &= \frac{y^{n+1}}{n+1}\ln(y) + \frac{1}{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_y^1 \\ &= \frac{y^{n+1}}{n+1}\ln(y) + \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{y^{n+1}}{n+1}\right) \\ &= \frac{y^{n+1}}{n+1}\ln(y) + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{y^{n+1}}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{y \to 0^+} y^{n+1}\ln(y) = 0$ par croissances comparées et $\displaystyle\lim_{y \to 0^+} \frac{y^{n+1}}{(n+1)^2} = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{y \to 0^+} \int_y^1 -t^n \ln(t)dt = \frac{1}{(n+1)^2}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 -t^n \ln(t)dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

4)c)Des questions 4)a) et 4)b), on déduit que $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t)\right)dt$ converge d'après le critère de négligeabilité.
En intégrant les inégalités 4)a) entre les bornes croissantes 0 et 1, on a :
$0 \leq \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t)\right)dt \leq \int_0^1 -t^n \ln(t)dt$,

Puis, par linéarité de l'intégrale : $0 \leq \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}dt - \int_0^1 \ln(t)dt \leq \int_0^1 -t^n \ln(t)dt$

Puis, grâce aux questions B4)b) et A1)b) : $0 \leq J_n + 1 \leq \frac{1}{(n+1)^2}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$, la propriété d'encadrement donne :
$\lim\limits_{n\to+\infty} (J_n + 1) = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = -1$.

5)a)L'inégalité de gauche est claire, elle provient du fait que $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $[1, +\infty[$ et que $\ln(1) = 0$.
Pour celle de droite, on étudie la fonction $f : x \mapsto \ln(x) - x$ sur $[1, +\infty[$.
Elle y est dérivable et $\forall x \geq 1, f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \leq 0$.
Donc f est décroissante sur $[1, +\infty[$.
Comme $f(1) = -1 \leq 0$, cela entraîne que $\forall x \geq 1, f(x) \leq 0$.
On conclut que $\forall x \geq 1, \ln(x) \leq x$. Ainsi, $\forall x \geq 1,\ 0 \leq \ln(x) \leq x \quad (*)$

$\forall x \geq 1,\ 1 + x^n \geq x^n > 0$ donc $0 \leq \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^n} \quad (**)$

En multipliant membre à membre les inégalités $(*)$ et $(**)$, on obtient :
$\forall x \geq 1,\ 0 \leq \frac{\ln x}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{n-1}}$.

5)b)Comme $n \geq 3$, on a : $n - 1 \geq 2$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}}dx$ est alors une intégrale de Riemann convergente.
En intégrant les inégalités 5)a) entre 1 et $+\infty$, on déduit :
$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^n}dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}}dx$.
Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}}dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{1}{x^{n-1}}dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A x^{1-n}dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \left[\frac{x^{2-n}}{2-n}\right]_1^A =$
$\lim\limits_{A\to+\infty} \left[\frac{1}{(2-n)x^{n-2}}\right]_1^A = \lim\limits_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{(2-n)A^{n-2}} - \frac{1}{2-n}\right) = \frac{1}{n-2}$.
(En effet, $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{n-2} = +\infty$ du fait que $n - 2 > 0$).

On conclut que pour tout entier $n \geq 3$, $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^n}dx \leq \frac{1}{n-2}$,
c'est-à-dire : $0 \leq K_n \leq \frac{1}{n-2}$.

5)c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n-2} = 0$. La propriété d'encadrement donne : $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = 0$.
D'après la relation de Chasles, on a : $I_n = J_n + K_n$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = -1$ d'après B4)c) et $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = 0$.
Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = -1$.

Partie C :

6)$u=-\ln(t) \iff \ln(t)=-u \iff t=e^{-u}=\varphi(u)$.

• bornes :
$t=y \iff u=-\ln(y)$ et $t=1 \iff u=0$.

• fonction :
$\dfrac{\ln(t)}{1+t^n}=\dfrac{-u}{1+(e^{-u})^n}=\dfrac{-u}{1+e^{-nu}}$.

• élément différentiel :
$dt=\varphi'(u)du=-e^{-u}du$.

La fonction $\varphi : u \mapsto e^{-u}$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$. La formule de changement de variable est licite et donne :

$\displaystyle\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}dt=\int_{-\ln(y)}^0 \frac{-u}{1+e^{-nu}}\times(-e^{-u})du=\int_{-\ln(y)}^0 \frac{u}{1+e^{-nu}}e^{-u}du.$

Donc $\displaystyle\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}dt=\int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+e^{-nu}}e^{-u}du$, par antisymétrie de l'intégrale.

7)a)Une densité de X est donnée par : $f(t)=\begin{cases} e^{-t} & \text{si } t\geq 0 \\ 0 & \text{si } t<0. \end{cases}$

7)b)Y_n est de la forme $Y_n=g(X)$ avec $g : x\mapsto \dfrac{-x}{1+e^{-nx}}$.

D'après le théorème de transfert, Y_n admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$ est absolument convergente.

Comme f est nulle sur $]-\infty,0]$ et que $t\mapsto g(t)f(t)$ est positive sur $[0,+\infty[$, on est ramené à montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)f(t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{-t}{1+e^{-nt}}e^{-t}dt$.

Or, d'après C6), $\displaystyle\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}dt=\int_0^{-\ln(y)}\frac{-t}{1+e^{-nt}}e^{-t}dt$.

$\displaystyle\lim_{y\to 0^+}\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}dt$ existe car $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}dt$ converge.

Donc $\displaystyle\lim_{y\to 0^+}\int_0^{-\ln(y)}\frac{-t}{1+e^{-nt}}e^{-t}dt$ existe.

Comme $\displaystyle\lim_{y\to 0^+}\big(-\ln(y)\big)=+\infty$, cela entraîne que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{-t}{1+e^{-nt}}e^{-t}dt$ converge.

Donc Y_n admet une espérance qu'on obtient en faisant $y\to 0^+$ dans C6) :

$\displaystyle E(Y_n)=\int_0^{+\infty}\frac{-t}{1+e^{-nt}}e^{-t}dt=\int_0^1\frac{\ln(t)}{1+t^n}dt=J_n.$

8)programme :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def simulY(n,m):
    Y=np.zeros(shape=(1,m))
    for i in range(m):
        X=rd.exponential(1)
        Y[0,i]=-X/(1+np.exp(-n*X))
    return Y
```

9)a)Loi faible des grands nombres :

Soit $(Z_m)_{m\geq 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même espérance μ et de même variance.

Soit $\overline{Z_m} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=1}^{m} Z_k$, la moyenne empirique.

Alors, pour tout réel $\epsilon > 0$, $\lim\limits_{m\to+\infty} P\left(|\overline{Z_m} - \mu| \geq \epsilon\right) = 0$.

Cela traduit le fait qu'en faisant un grand nombre m d'expériences aléatoires, la valeur moyenne prise par Z_m est proche de μ.

9)b)programme :

```
n=int(input("entrer la valeur de n"))
print(np.mean(simulY(n,1000)))
```

Le programme affiche la valeur moyenne que prend Y_n sur m=1000 expériences aléatoires.
Comme m est grand, cette valeur sera proche de $E(Y_n) = J_n$ du fait de la loi faible des grands nombres.
Ce programme permet donc de trouver une valeur approchée de J_n.

✓ Pour $n = 2$, le programme Python renvoie une valeur proche de -0.9. Donc $J_2 \approx -0.9$

Exercice 3 (ecricome 2021)

Partie A :

1)$(X=2)=P_1\cap P_2$.
Par indépendance, $a_2=P(X=2)=P(P_1)P(P_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$.
$(X=3)=F_1\cap P_2\cap P_3$.
Par indépendance, $a_3=P(X=3)=P(F_1)P(P_2)P(P_3)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$.
$(X=4)=(F_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4)\cup(P_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4)=F_2\cap P_3\cap P_4$.
Par indépendance, $a_4=P(X=4)=P(F_2)P(P_3)P(P_4)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$.

2)$\overline{U_n}$ est réalisé si et seulement si on n'obtient aucune séquence Pile,Pile lors des n premiers lancers, ce qui se produit si et seulement si le rang d'obtention de la première séquence Pile,Pile est supérieur à n.
Ainsi, $\overline{U_n}=(X>n)$ et donc $U_n=(X\leq n)=\bigcup\limits_{k=2}^{n}(X=k)$.
Les événements $(X=k)_{2\leq k\leq n}$ sont incompatibles deux à deux.
Donc $P(U_n)=\sum\limits_{k=2}^{n}P(X=k)$, c'est-à-dire : $u_n=\sum\limits_{k=2}^{n}a_k$.

3)a)programme :

```
from numpy.random import random
def simulX():
    tirs=0
    pile=0
    while pile<2:
        if random()<1/2:
            pile=pile+1
        else:
            pile=0
        tirs=tirs+1
    return tirs
```

3)b)On complète le programme précédent avec les instructions :

```
def moyenne(n):
    s=0
    for k in range(n):
        s=s+simulX()
        print(s)
    m=s/n
    return m
```

3)c)D'après la loi faible des grands nombres, moyenne(n) est de plus en plus proche de l'espérance de X au fur et à mesure que n croît.
On peut donc conjecturer que $E(X) = 6$.

Partie B :

4)a)U_{n+1} est réalisé si et seulement si la séquence Pile,Pile apparaît au moins une fois lors des $n+1$ premiers lancers.
Il y a alors deux possibilités :
− la séquence Pile,Pile apparaît au moins une fois lors des n premiers lancers, ce qui signifie que U_n est réalisé,
− la séquence Pile,Pile apparaît aux n-ième et $n+1$-ième lancers, ce qui signifie que B_{n+1} est réalisé.

Ainsi, $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$ et la formule du crible donne alors :

$P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1})$.

4)b)En tenant compte des deux possibilités du $n-1$-ième lancer, on a :

$$\begin{aligned} U_n \cap B_{n+1} &= (U_n \cap F_{n-1} \cap B_{n+1}) \cup (U_n \cap P_{n-1} \cap B_{n+1}) \\ &= (U_n \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (U_n \cap P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}). \end{aligned}$$

D'une part, $U_n \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1} = U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$.
En effet, la réalisation de $U_n \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ entraîne qu'une séquence Pile,Pile a été obtenue aux n premiers lancers. Cette séquence n'a pu être obtenue ni au $n-1$-ième lancer ni au n-ième lancer du fait de la réalisation de l'événement $F_{n-1} \cap P_n$. Elle est donc apparue aux $n-2$ premiers lancers, ce qui réalise U_{n-2}.
Donc $U_n \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1} \subset U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$.
L'inclusion contraire est évidente et provient du fait que $U_{n-2} \subset U_n$.

D'autre part, $P_{n-1} \cap P_n \subset U_n$. Donc $U_n \cap P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1} = P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$.

On conclut que $U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$.

4)c)$P(U_{n+1}) = u_{n+1}$,

$P(U_n) = u_n$,

$P(B_{n+1}) = P(P_n \cap P_{n+1}) \underset{indep.}{=} P(P_n)P(P_{n+1}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$,

$$\begin{aligned} P(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) &\underset{indep.}{=} P(U_{n-2})P(F_{n-1})P(P_n)P(P_{n+1}) \\ &= u_{n-2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8} u_{n-2}, \end{aligned}$$

$P(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \underset{indep.}{=} P(P_{n-1})P(P_n)P(P_{n+1}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$, La question 4)b) donne par incompatibilité des événements :

$$\begin{aligned} P(U_n \cap B_{n+1}) &= P(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) + P(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \\ &= \frac{1}{8}u_{n-2} + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Enfin, la question 4)a) donne : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{4} - \left(\dfrac{1}{8}u_{n-2} + \dfrac{1}{8}\right)$,

c'est-à-dire : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.

5)u_{n-2} est une probabilité donc $u_{n-2} \leq 1$. La question 4)c) donne alors pour $n \geq 4$: $u_{n+1} \geq u_n$. Donc la suite $(u_n)_{n\geq 4}$ est croissante.

Etant de plus majorée par 1 (car c'est une probabilité), elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone.

Posons $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Un passage à la limite dans l'égalité 4)c) donne : $L = L + \dfrac{1}{8}(1-L)$, ce qui mène à $\dfrac{1}{8}(1-L) = 0$ donc à $L = 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

6)L'événement $(X = -1)$ est réalisé si et seulement si la séquence Pile,Pile n'apparaît jamais, ce qui se produit si et seulement si aucun des événements U_n n'est réalisé.

Donc $(X = -1) = \bigcap\limits_{n=2}^{+\infty} \overline{U_n} = \overline{\bigcup\limits_{n=2}^{+\infty} U_n}$, grâce à la formule de Morgan.

On déduit : $P(X = -1) = 1 - P\left(\bigcup\limits_{n=2}^{+\infty} U_n\right) \quad (*)$

La suite U_n est croissante pour l'inclusion car $\forall n \geq 2, U_n \subset U_{n+1}$.

D'après le théorème de la limite monotone, on a :

$P\left(\bigcup\limits_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.$

En reportant dans $(*)$, on obtient $P(X = -1) = 0$.

Partie C :

7)Compte tenu de l'égalité $u_n = 1 - v_n$, l'égalité B4)c) donne pour tout entier $n \geq 4$:

$1 - v_{n+1} = (1 - v_n) + \dfrac{1}{8}v_{n-2}$, c'est-à-dire : $v_n - v_{n+1} = \dfrac{1}{8}v_{n-2}$.

8)$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, v_n - v_{n+1} &= u_{n+1} - u_n \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} a_k - \sum_{k=2}^{n} a_k \text{ grâce à A2} \\ &= a_{n+1}. \end{aligned}$$

Donc $P(X = n+1) = v_n - v_{n+1}$.

9)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$ ».

$\mathscr{P}(2)$ s'écrit : « $S_2 = 6 - 8v_4 - 2v_2$ ».

Or, $S_2 = 2P(X=2) = 2a_2 = 2 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$,

$v_2 = 1 - u_2 = 1 - a_2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$,

$v_4 = 1 - u_4 = 1 - (a_2 + a_3 + a_4) = 1 - \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{1}{2}$.

On voit que $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

Soit $n \geq 2$ entier. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=2}^{n+1} ka_k \\
&= S_n + (n+1)a_{n+1} \\
&= 6 - 8v_{n+2} - nv_n + (n+1)a_{n+1} \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= 6 - 8v_{n+2} - nv_n + (n+1)\left(v_n - v_{n+1}\right) \text{ d'après C8} \\
&= 6 - 8v_{n+2} + v_n - (n+1)v_{n+1} \\
&= 6 - 8\left(v_{n+3} + \frac{1}{8}v_n\right) + v_n - (n+1)v_{n+1}, \text{ grâce à C7 avec } n \to n+2 \\
&= 6 - 8v_{n+3} - (n+1)v_{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que pour tout entier $n \geq 2$, $S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$.

10)$\forall n \geq 2, S_{n+1} - S_n = (n+1)P(X = n+1) \geq 0$.
Donc $(S_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

$\forall n \in \mathbf{N}, v_{n+2} \geq 0$ et $nv_n \geq 0$ donc $S_n \leq 6$ par l'égalité 9).
Donc $(S_n)_{n\geq 2}$ est majorée.

11)La suite $(S_n)_{n\geq 2}$ est croissante et majorée donc convergente.

De plus, $\forall n \geq 2, \displaystyle\sum_{k=2}^{n} |kP(X=k)| = \sum_{k=2}^{n} P(X=k) = S_n$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} |kP(X=k)| = \lim_{n\to+\infty} S_n$ existe et est finie, ce qui prouve que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} kP(X=k)$ est absolument convergente.

Ainsi, X admet une espérance et $E(X) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

12)a)La question 9) donne $\forall n \geq 2, nv_n = 6 - 8v_{n+2} - S_n$.

D'après 5), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ et aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_{n+2} = 0$,

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe et est finie, Par somme de limites, $\lim_{n\to+\infty}(6-8v_{n+2}-S_n)$ existe et est finie, ce qui prouve la convergence de la suite $(nv_n)_{n\geq 2}$ vers un réel λ.

12)b)Supposons $\lambda \neq 0$. On a alors $nv_n \underset{+\infty}{\sim} \lambda$ ou encore $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$.

$\sum_{n\geq 2}\dfrac{\lambda}{n}$ diverge car elle a même nature que la série harmonique $\sum_{n\geq 2}\dfrac{1}{n}$.
D'après le critère d'équivalence sur les séries à termes +, $\sum_{n\geq 2} v_n$ diverge.

La question 7) réindéxée avec $n \to n+2$ donne :
$\forall n \geq 2, v_{n+2}-v_{n+3}=\dfrac{1}{8}v_n$ ou encore $v_n = 8\,(v_{n+2}-v_{n+3})$.
$\sum_{n\geq 2} v_n$ diverge donc $\sum_{n\geq 2}(v_{n+2}-v_{n+3})$ diverge.
Or, $\sum_{n\geq 2}(v_{n+2}-v_{n+3})$ est une série alternée convergente puisque $\lim_{n\to+\infty} v_{n+2}$ existe et est finie.
On obtient donc une contradiction ! Ainsi, $\lambda = 0$.

12)c)La question 12)b) donne : $\lim_{n\to+\infty} nv_n = 0$.

En passant à la limite dans l'égalité 9), on obtient : $\lim_{n\to+\infty} S_n = 6$.

Donc $E(X) = 6$.