Exercice 1 (eml 2017)

Partie I

1)Pour tous polynômes P et Q de E, pour tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned} a(\lambda P+Q) &= (\lambda P+Q)-X(\lambda P+Q)' \\ &= \lambda P+Q-X(\lambda P'+Q') \\ &= \lambda(P-XP')+(Q-XQ') \\ &= \lambda a(P)+a(Q). \end{aligned}$$

Donc a est linéaire.

Pour tout $P\in E$, $deg(P')\leq 1$ donc $deg(XP')\leq 2$, puis $deg(P-XP')\leq 2$.
Donc $\forall P\in E,\ a(P)\in E$, ce qui prouve que a est « endo ».

Ainsi, a est un endomorphisme de E.

2)a)$a(e_0)=e_0-Xe_0'=1-X0=1=1e_0+0e_1+0e_2$,
$a(e_1)=e_1-Xe_1'=X-X1=0=0e_0+0e_1+0e_2$,
$a(e_2)=e_2-Xe_2'=X^2-X(2X)=-X^2=0e_0+0e_1-1e_2$.

Donc $A=\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(a)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

2)b)Le rang de A est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A.

La deuxième colonne est nulle donc $rg(A)=dim\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice du $Vect$ et libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est donc une base du $Vect$.
Donc $rg(A)=2$.

3)• $A\in\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et $rg(A)<3$ donc A n'est pas inversible.
En conséquence, a n'est pas bijectif.

• $Ker(a)=\{P\in E,\ \mid a(P)=0\}$.

Posons $P=\alpha+\beta X+\gamma X^2$ et $U=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ son vecteur colonne dans $\mathscr{B}$.

$$\begin{aligned} P\in Ker(a) &\iff a(P)=0 \\ &\iff AU=0 \\ &\iff \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \\ &\iff \alpha=0 \text{ et } -\gamma=0. \end{aligned}$$

Donc $Ker(a) = \{\beta X, \beta \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}\big(X\big) = \text{Vect}\,(e_1)$.

(X) est une famille génératrice de $Ker(a)$ et libre car constituée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $Ker(a)$.

• $Im(a) = \text{Vect}\ (a(e_0), a(e_1), a(e_2)) = \text{Vect}\ \big(1, 0, -X^2\big) = \text{Vect}\ \big(1, X^2\big)$.
$(1, X^2)$ est une famille génératrice de $Im(a)$ et libre car 1 et X^2 ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de $Im(a)$.

Partie II

4)Soit d l'endomorphisme de E défini par $\forall Q \in E,\ d(Q) = Q + Q' + Q"$.

Pour tout polynôme P de E, on a :

$$\begin{aligned}(b \circ d)(Q) &= b\big(d(Q)\big)\\ &= b\left(Q + Q' + Q"\right)\\ &= \left(Q + Q' + Q"\right) - \left(Q + Q' + Q"\right)'\\ &= Q + Q' + Q" - \left(Q' + Q'' + Q"'\right)\\ &= Q - Q'''\\ &= Q \text{ car } Q''' \text{ est nul puisque } deg(Q) \leq 2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d \circ b)(Q) &= d\big(b(Q)\big)\\ &= d\left(Q - Q'\right)\\ &= \left(Q - Q'\right) + \left(Q - Q'\right)' + \left(Q - Q'\right)''\\ &= \left(Q - Q'\right) + \left(Q' - Q''\right) + \left(Q'' - Q'''\right)\\ &= Q - Q'''\\ &= Q.\end{aligned}$$

Donc $b \circ d = d \circ b = \text{Id}_E$.

Donc b est bijectif et $b^{-1} = d$. Ainsi, $\forall Q \in E,\ b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q"$.

5)a)$b(e_0) = e_0 - e_0' = 1 - 0 = 1 = 1e_0 + 0e_1 + 0e_2$,
$b(e_1) = e_1 - e_1' = X - 1 = -1e_0 + 1e_1 + 0e_2$,
$b(e_2) = e_2 - e_2' = X^2 - 2X = 0e_0 - 2e_1 + 1e_2$.

Donc $B = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

B est triangulaire. Ses valeurs propres sont sur sa diagonale.
Donc $sp(B) = \{1\}$.

5)b)Supposons B diagonalisable. Alors, il existe $P \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ inversible et $D \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ diagonale telles que $B = PDP^{-1}$.
D porte sur sa diagonale les valeurs propres de B. Donc $D = I$.
On a alors : $B = PIP^{-1} = I$, ce qui est absurde.
Donc B n'est pas diagonalisable et b non plus.

Partie III

6)$c(e_0) = 2Xe_0 - (X^2-1)e_0' = 2X1 - (X^2-1)0 = 2X = 0e_0 + 2e_1 + 0e_2$,
$c(e_1) = 2Xe_1 - (X^2-1)e_1' = 2X^2 - (X^2-1)1 = X^2+1 = 1e_0 + 0e_1 + 1e_2$,
$c(e_2) = 2Xe_2 - (X^2-1)e_2' = 2X^3 - (X^2-1)2X = 2X = 0e_0 + 2e_1 + 0e_2$.

Donc $C = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7)C possède deux colonnes identiques donc $rg(C) \leq 2$.
Donc C n'est pas inversible. Ainsi, c n'est pas bijectif.

8)a)Cherchons les valeurs propres et sous-espaces propres de C.

Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $E_\lambda(C) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (C-\lambda I)U = 0\}$.

Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(C-\lambda I)U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -\lambda x + y & = 0 \\ 2x - \lambda y + 2z & = 0 \\ y - \lambda z & = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ 2x - \lambda^2 x + 2z = 0 \\ \lambda(x-z) = 0 \end{cases}$$

.

La troisième équation amène une discussion.

• $\lambda = 0$

Le système est équivalent à : $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ 0(x-z) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$

Donc $E_0(C) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = 0, z = -x \right\} = \text{Vect}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right)$.

$E_0(C)$ est non nul donc 0 est valeur propre de C, ce qu'on savait déjà par la question 7).
De plus, le sous-espace propre de C associé à 0 est $E_0(C)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_0(C)$ et libre car constituée d'un seul vecteur non nul. Donc c'est une base de $E_0(C)$.

• $\lambda \neq 0$

Le système est équivalent à : $\begin{cases} y = \lambda z \\ (4-\lambda^2)z = 0 \\ x = z \end{cases}$

(i)$\lambda = 2$

Le système est équivalent à : $\begin{cases} y = 2z \\ x = z \end{cases}$

Donc $E_2(C) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = 2z, x = z \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$E_2(C)$ est non nul donc 2 est valeur propre de C.
De plus, le sous-espace propre de C associé à 2 est $E_2(C)$.

Une base de $E_2(C)$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(ii)$\lambda = -2$

Le système est équivalent à : $\begin{cases} y = -2z \\ x = z \end{cases}$

Donc $E_{-2}(C) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = -2z, x = z \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$E_{-2}(C)$ est non nul donc -2 est valeur propre de C.
De plus, le sous-espace propre de C associé à -2 est $E_{-2}(C)$.

Une base de $E_{-2}(C)$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(iii)$\lambda \neq -2, 0, 2$

La deuxième équation donne $z = 0$, puis $x = y = 0$. Donc $E_\lambda(C)$ est nul et λ n'est pas valeur propre de C.

Concluons : $C \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ admet 3 valeurs propres distinctes -2, 0 et 2.
Donc C est diagonalisable.
Il existe donc une matrice $R \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ diagonale telles que $C = RDR^{-1}$.
D porte sur sa diagonale les valeurs propres de C à savoir -2, 0 et 2.

L'énoncé impose que $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Les colonnes de R sont formées des bases des sous-espaces propres de C.

On prend $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8)b)C est diagonalisable donc c également.
Compte tenu des bases trouvées pour $E_{-2}(C)$, $E_0(C)$ et $E_2(C)$, on obtient $(1-2X+X^2)$, $(1-X^2)$ et $(1+2X+X^2)$ comme bases respectives de $E_{-2}(c)$, $E_0(c)$ et $E_2(c)$.

La famille $(1-2X+X^2, 1-X^2, 1+2X+X^2)$ est libre car constituée de vecteurs propres de c associés à des valeurs propres différentes.
C'est une famille libre de vecteurs de E dont le cardinal coïncide avec la dimension de E, c'est donc une base de E.

Partie IV

9)Pour tout polynôme P de E, on a :

$$\begin{aligned}
f(P) &= (b \circ a - a \circ b)(P) \\
&= b\left(a(P)\right) - a\left(b(P)\right) \\
&= b\left(P - XP'\right) - a\left(P - P'\right) \\
&= \left(P - XP'\right) - \left(P - XP'\right)' - \left(\left(P - P'\right) - X\left(P - P'\right)'\right) \\
&= P - XP' - \left(P' - 1P' - XP''\right) - P + P' + X\left(P' - P''\right) \\
&= P - XP' - P' + P' + XP'' - P + P' + XP' - XP'' \\
&= P'.
\end{aligned}$$

10)$\forall P \in E, f^3(P) = P''' = 0$ car $deg(P) \leq 2$. Donc $f^3 = 0$.

Or, $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(b \circ a - a \circ b) = BA - AB$.

Donc $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f^3) = (BA - AB)^3$.

Comme $f^3 = 0$, on déduit que $(BA - AB)^3 = 0$.

Exercice 2 (eml 2018)

Partie I : étude de f

1)f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme différence de fonctions dérivables et $\forall x>0, f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Par différence, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Quand $x \to +\infty$, on écrit : $f(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2)f est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$. Elle réalise donc une bijection de $]0,1[$ sur $]1,+\infty[$.
$2 \in]1,+\infty[$ admet donc un unique antécédent $a \in]0,1[$ par f.

De même, f est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]1,+\infty[$.
$2 \in]1,+\infty[$ admet donc un unique antécédent $b \in]1,+\infty[$ par f.

Enfin, $f(1) = 1 \neq 2$.

L'équation $f(x) = 2$ admet donc deux solutions, l'une est $a \in]0,1[$, l'autre est $b \in]1,+\infty[$.

3)$f(2) = 2 - \ln 2 \approx 1,3$
$f(4) = 4 - \ln 4 = 4 - 2\ln 2 \approx 2,6$
$f(b) = 2$.

Donc $f(2) \leq f(b) \leq f(4)$.

Comme f est croissante sur $[2,4]$, on déduit que $2 \leq b \leq 4$.

Partie II : étude d'une suite

4)Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$:« U_n existe et $U_n \geq b$ » est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Par énoncé, $U_0 \geq 4$ et $b \leq 4$ donc U_0 existe et $U_0 \geq b$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a : $U_n \geq b > 0$ donc $U_n > 0$.
Ainsi, $U_n \in D_f$ donc $f(U_n)$ existe, c'est-à-dire U_{n+1} existe.
De $U_n \geq b$, on déduit par croissance du logarithme que $\ln U_n \geq \ln b$, puis $\ln U_n + 2 \geq \ln b + 2$, c'est-à-dire $U_{n+1} \geq \ln b + 2 \quad (*)$
Or, $f(b) = 0$ donne $b - \ln b = 2$, soit $\ln b + 2 = b$.
En reportant dans $(*)$, on a : $U_{n+1} \geq b$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
On conclut que pour tout $n \in \mathbf{N}$, U_n existe et $U_n \geq b$.

5)Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} \leq U_n$.
Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $U_{n+1} \leq U_n$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $U_1 \leq U_0$ ».
Or, $U_0 = 4$ et $U_1 = \ln U_0 + 2 = \ln 4 + 2 = 2\ln 2 + 2 \approx 3,4$. Donc $U_1 \leq U_0$.
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a $U_{n+1} \leq U_n$.
Par croissance du logarithme, on déduit :
$\ln U_{n+1} \leq \ln U_n$, puis $\ln U_{n+1} + 2 \leq \ln U_n + 2$, c'est-à-dire : $U_{n+2} \leq U_{n+1}$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} \leq U_n$, ce qui prouve que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

$(U_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée par b donc convergente vers L.
Par passage à la limite, on a : $L \geq b$.

La fonction $g : x \mapsto \ln x + 2$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc en L.
De plus, on a $\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} = g(U_n)$.
D'après le théorème du point fixe, L est un point fixe de g donc est solution de l'équation $g(x) = x$.
Or, $g(x) = x \iff \ln x + 2 = x \iff f(x) = 2 \iff x = a$ ou $x = b$.

On ne peut pas avoir $L = a$ car $L \geq b$ donc $L = b$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = b$.

6)a)$g : x \mapsto \ln x + 2$ est dérivable sur $[b, +\infty[$ et $\forall x \geq b, g'(x) = \dfrac{1}{x}$.
$\forall x \geq b, g'(x) \leq \dfrac{1}{b}$ et comme $b \geq 2$, on déduit que $\forall x \geq b, g'(x) \leq \dfrac{1}{2}$.
D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout réel $a \geq b$, on a :
$g(a) - g(b) \leq \dfrac{1}{2}(a - b)$.

Comme $U_n \geq b$, il est licite de prendre $a = U_n$, on obtient alors :
$\forall n \in \mathbf{N}, g(U_n) - g(b) \leq \dfrac{1}{2}(U_n - b)$.

Or, $g(U_n) = U_{n+1}$ et $g(b) = b$ donc $\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(U_n - b)$.

6)b)On sait déjà que $\forall n \in \mathbf{N}, U_n \geq b$ donc $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq U_n - b$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, U_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : $\ll\ U_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}\ \gg$.

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : $\ll\ U_0 - b \leq \dfrac{1}{2^{-1}}\ \gg$.

Or, $U_0 - b \leq \dfrac{1}{2^{-1}} \iff 4 - b \leq 2 \iff b \geq 2$, ce qui est vrai.
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a : $U_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

En multipliant membre à membre par $\frac{1}{2}$, on obtient : $\dfrac{1}{2}(U_n - b) \leq \dfrac{1}{2^n}$.

Or, $U_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(U_n - b)$.

En recollant les inégalités, on a : $U_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2^n}$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}, U_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq U_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

7)a)programme :

```
import numpy as np
def suite(n):
    u=4
    for k in range(n):
        u=np.log(u)+2
    return u
```

7)b)On sait que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et converge vers b.
Dès que $\frac{1}{2^{n-1}} \leq \epsilon$, on a $U_n - b \leq \epsilon$ et U_n est alors une valeur approchée de b à epsilon près, d'où le programme suivant :

```
def valeur_approchee(epsilon):
    n=1
    while 1/2**(n-1)>epsilon:
        n=n+1
    return(suite(n))
```

Partie III : étude d'une fonction définie par une intégrale

8)La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{f(t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$ comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $x>0$, on a aussi $2x>0$. Donc $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$ existe.

$t \mapsto \dfrac{1}{f(t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc admet sur $]0,+\infty[$ une primitive G.

Pour tout $x>0$, on a alors : $\phi(x) = G(2x) - G(x)$.

ϕ est dérivable par différence et composée de fonctions dérivables et pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned}
G'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) \\
&= 2 \times \frac{1}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\
&= \frac{2}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln x} \\
&= \frac{2(x-\ln x) - (2x - \ln(2x))}{(x-\ln x)\,(2x-\ln(2x))} \\
&= \frac{\ln(2x) - 2\ln x}{(x-\ln x)\,(2x-\ln(2x))} \\
&= \frac{\ln 2 + \ln x - 2\ln x}{(x-\ln x)\,(2x-\ln(2x))} \\
&= \frac{\ln 2 - \ln x}{(x-\ln x)\,(2x-\ln(2x))}.
\end{aligned}$$

9)On sait que $\forall x>0, f(x)>0$ donc $\forall x>0, x-\ln x>0$.
On a également $\forall x>0, f(2x)>0$ donc $\forall x>0, 2x-\ln(2x)>0$.

Donc $\phi'(x) \geq 0 \iff \ln 2 - \ln x \geq 0 \iff \ln x \leq \ln 2 \iff x \leq 2$.

x	0		2		$+\infty$
$\phi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\phi(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

10)Soit $x>0$.
$\forall t \in [x,2x]\,, f(t) \geq 1$ donc $\forall t \in [x,2x]\,, 0 \leq \dfrac{1}{f(t)} \leq 1$.

Par croissance de l'intégrale ($x \leq 2x$), on a : $0 \leq \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} \mathrm{d}t \leq \int_x^{2x} 1 \mathrm{d}t$.

Or, $\int_x^{2x} 1 \mathrm{d}t = (2x - x) \times 1 = x$.

Donc $\forall x > 0, 0 \leq \phi(x) \leq x$.

11)a) $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0^+} \phi(x) = 0$.

Cette limite est finie donc ϕ est prolongeable par continuité en 0.
On pose alors $\phi(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \phi(x) = 0$.

11)b)Quand $x \to 0^+$, on a : $\ln 2 - \ln x \sim -\ln x$.

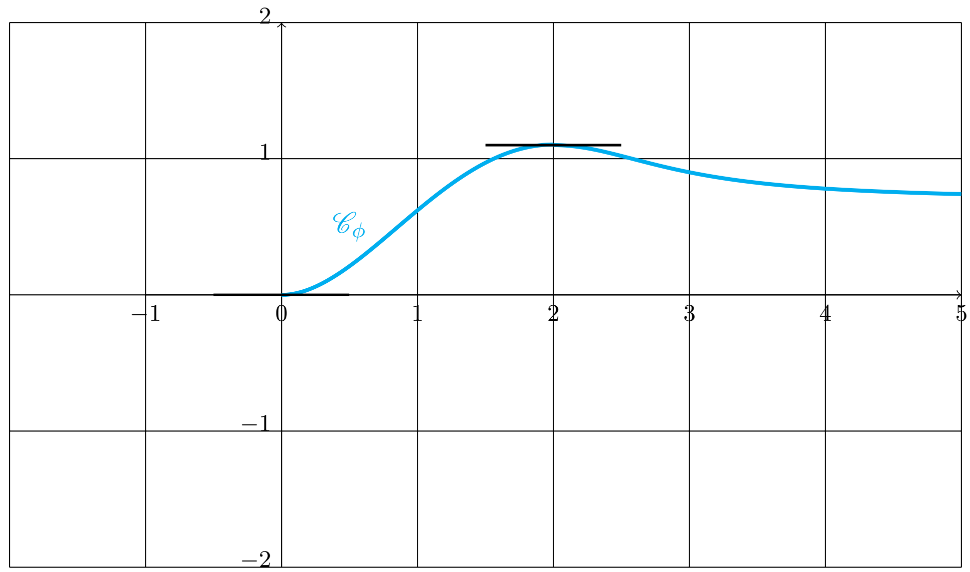
En effet, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln 2 - \ln x}{-\ln x} = \lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{\ln 2}{\ln x} + 1 = 1$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

De même, quand $x \to 0^+$, on a : $x - \ln x \sim -\ln x$ et $2x - \ln(2x) \sim -\ln(2x)$.

Par quotient, quand $x \to 0^+$, on a : $\phi'(x) \sim -\frac{1}{\ln(2x)}$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{1}{\ln(2x)} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \phi'(x) = 0$.

12)La tangente à $\mathscr{C}_\phi$ en 0 a pour équation $y = \phi'(0)x + \phi(0)$.
Or, $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) = 0$.
Donc cette tangente a pour équation $y = 0$.



Partie IV : étude d'une fonction de deux variables

13)a)$\forall (x,y) \in U, \partial_1 H(x,y) = x - y - 2$ et $\partial_2 H(x,y) = -x + e^y$.

13)b)Les points critiques de H sont les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_1 H(x,y) & = & 0 \\ \partial_2 H(x,y) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x - y - 2 & = & 0 \\ -x + e^y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x - y - 2 = 0 \\ e^y = x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x - \ln x - 2 = 0 \\ y = \ln x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} f(x) = 2 \\ y = \ln x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = a \text{ ou } x = b \\ y = \ln x \end{array}\right.$$

Les points critiques de H sont $(a, \ln a)$ et $(b, \ln b)$.

14)a)$\partial_{1,1} H(x,y) = 1$, $\partial_{1,2} H(x,y) = \partial_{2,1} H(x,y) = -1$, $\partial_{2,2} H(x,y) = e^y$.

Donc $\nabla^2 H(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & e^y \end{pmatrix}$.

On déduit $M_a = \nabla^2 H(a, \ln a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$.

14)b)λ est valeur propre de M_a

$\iff M_a - \lambda I$ n'est pas inversible

$\iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & a-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\iff (1-\lambda)(a-\lambda) - 1 = 0$

$\iff \lambda^2 - (a+1)\lambda + a - 1 = 0$.

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de M_a sont donc les racines du polynôme $X^2 - (a+1)X + a - 1$.

On a donc $X^2 - (a+1)X + a - 1 = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$, ce qui donne en développant le membre de droite :

$X^2 - (a+1)X + a - 1 = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2$.

En identifiant, on obtient : $\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = a + 1 \\ \lambda_1\lambda_2 = a - 1 \end{array}\right.$

14)c)Comme $a < 1$, on a $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Donc λ_1 et λ_2 sont de signes contraires. H ne présente pas d'extrémum local en $(a, \ln a)$. C'est un point selle.

15)Notons M_b la matrice hessienne de H au point $(b, \ln b)$.
En faisant le même raisonnement, les valeurs propres γ_1 et γ_2 de M_b vérifient :

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 = b + 1 \\ \gamma_1 \gamma_2 = b - 1 \end{cases}$$

Comme $b > 1$, on a $\gamma_1 \gamma_2 > 0$. Donc γ_1 et γ_2 sont de même signe.

Comme de plus, $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, on a finalement $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 > 0$.

Ainsi, H présente en $(b, \ln b)$ un minimum local.

Problème (edhec 2020)

1)La fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{(1+x)^2}$ est continue sur $[0,1]$ donc I_n existe.
Même argument pour J_n.

2)$I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{(1+x)-1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \qquad \text{(sans cette astuce, il faudrait poser } t=1+x\text{)} \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \\
&= \left[\ln(1+x)\right]_0^1 - I_0 \\
&= \ln 2 - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3)a)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
&I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x + 2\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+2}}{(1+x)^2} + \frac{2x^{n+1}}{(1+x)^2} + \frac{x^n}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+2}+2x^{n+1}+x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x^n(x^2+2x+1)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^n\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

3)b)L'égalité précédente pour $n=0$ donne :

$I_2 + 2I_1 + I_0 = 1$, d'où $I_2 = 1 - 2I_1 - I_0 = 1 - 2\left(\ln 2 - \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2}$.

Donc $I_2 = \dfrac{3}{2} - 2\ln 2$.

3)c)programme :

```
import numpy as np
n=int(input('entrer n'))
a=1/2
b=np.log(2)-1/2
for k in range(2,n+1):
    aux=a
    a=b
    b=1/(k-1)-2*a-aux
print(b)
```

4)a)$\forall x \in [0,1]\,, (1+x)^2 \geq 1$ donc $0 \leq \dfrac{1}{(1+x)^2} \leq 1$.

Puis, en multipliant par x^n positif : $0 \leq \dfrac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$.

En intégrant ces inégalités entre les bornes croissantes 0 et 1, on a :

$0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$, ce qui donne : $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

4)b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc par la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

5)Dans l'intégrale I_n, effectuons une intégration par parties en posant :

$u(x) = x^n \qquad v'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$

$u'(x) = nx^{n-1} \qquad v(x) = \dfrac{-1}{1+x}$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $(0,1]$. L'intégration par parties est licite et donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x &= \left[x^n \times \frac{-1}{1+x}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(nx^{n-1} \times \frac{-1}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2} + n\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x\end{aligned}.$$

Ainsi, $I_n = nJ_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

6)a)$J_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
J_n + J_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^n}{1+x} + \frac{x^{n+1}}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^n\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

6)b)L'égalité pour $n=0$ donne : $J_0 + J_1 = 1$, d'où $J_1 = 1 - J_0 = 1 - \ln 2$.

7)programme :

```
import numpy as np
n=int(input('entrer n'))
J=np.log(2)
for k in range(1,n):
    J=1/k-J
I=n*J-1/2
print(I)
```

8)D'après la question 6)a), on sait que $\forall n \in \mathbf{N}, J_n + J_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

En multipliant par $(-1)^n$ dans chaque membre, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$(-1)^n J_n + (-1)^n J_{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, soit : $(-1)^n J_n - (-1)^{n+1} J_{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

En sommant les égalités $(-1)^p J_p - (-1)^{p+1} J_{p+1} = \dfrac{(-1)^p}{p+1}$ pour p allant de 0 à $n-1$, on obtient pour tout entier $n \geq 1$:

$\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \left((-1)^p J_p - (-1)^{p+1} J_{p+1}\right) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p}{p+1}$, ce qui donne :

$(-1)^0 J_0 - (-1)^n J_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ par télescopage et changement d'indice

Comme $J_0 = \ln 2$ et $(-1)^0 = 1$, cela mène à : $(-1)^n J_n = \ln 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

En multipliant membre à membre par $(-1)^n$ et compte tenu que $(-1)^n \times (-1)^n = (-1)^{2n} = 1$, on conclut : $J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

✓ Cette question pouvait aussi se faire par récurrence.

9)a)La question 5) donne pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $J_{n-1} = \dfrac{I_n}{n} + \dfrac{1}{2n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ (question 4)) et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_n}{n} = 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$. Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} J_{n-1} = 0$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

9)b)La question 8) donne $\forall n \in \mathbf{N}^*, J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

En appliquant la valeur absolue sur chacun des membres, on a :

$|J_n| = \left|(-1)^n \left(\ln 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right|$, ce qui donne :

$|J_n| = |(-1)^n| \left|\ln 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|$ ou encore :

$|J_n| = \left|\ln 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|$ car $|(-1)^n| = 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\ln 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = 0$, ce qui montre que :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

Ainsi, la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

✓ Cette série s'appelle série harmonique alternée.

9)c)La question 5) donne $\forall n \in \mathbf{N}^*, nJ_{n-1} = I_n + \dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(I_n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} nJ_{n-1} = \dfrac{1}{2}$.

Donc $nJ_{n-1} \sim \dfrac{1}{2}$, puis $J_{n-1} \sim \dfrac{1}{2n}$.

En translatant l'indice, on a : $J_n \sim \dfrac{1}{2(n+1)}$ donc $J_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

10)a)La question 8) donne $\forall n \in \mathbf{N}^*, J_n = (-1)^n u_n$ donc $u_n = \dfrac{J_n}{(-1)^n}$

ou plus simplement $u_n = (-1)^n J_n$.

Comme $J_n \sim \dfrac{1}{2n}$, on déduit que $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}$.

10)b)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a : $\dfrac{(-1)^n}{2n} = \dfrac{(-1) \times (-1)^{n-1}}{2 \times n} = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n}$ est donc de même nature que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.
Cette dernière étant convergente d'après la question 9)b), on conclut que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n}$ converge également.

On a vu dans la question 10)a) que $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}$ et on sait que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n}$ est converge.
Pour autant, on ne peut pas conclure que la série de terme général u_n converge car le critère d'équivalence ne s'applique que pour des séries dont le terme général est positif (ce qui n'est pas le cas ici !)