DS2 CUBES - ECG2 - Mathématiques appliquées
mercredi 09/11/2022

Exercice 1

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsque

il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que : $B = P^{-1}AP$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie A : Premier exemple

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres de A.
   Justifier que A est inversible et diagonalisable.
2) Déterminer une matrice D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale où les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, telles que $A = PDP^{-1}$.
   Expliciter la matrice D^{-1}.
3) On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et QDQ.
4) En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x, -z, y + 2z).$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$.

5) Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.
6) (a) Vérifier que 1 est valeur propre de f et que (u_1, u_2) est une base du sous-espace propre associé.
   (b) Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$.

(c) Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On admet que $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

7) (a) Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathcal{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathcal{B}_2$.

(b) Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer $M_1 M_2$.

8) En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose : $N = T - I_3$.

9) Justifier que la matrice T est inversible. Est-elle diagonalisable ?

10) (a) Calculer N^3 et $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$.

(b) En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.

11) On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.

(a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g \circ g(u) \neq 0$ et $g \circ g \circ g(u) = 0$.

(b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$.

(d) Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.

12) Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 2

Soit $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} F_0 = 0 \text{ et } F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$

Partie I

1)Ecrire une fonction Python *fibo(n)* qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur de F_n.

En exécutant le script ci-dessous :

```
L=[]
for k in range(15):
    L.append(fibo(k))
print(L)
```

On obtient alors : $[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377]$

2)a)Montrer par récurrence que $\forall n \geq 2,\ F_{n+1} > F_n > 0$.

b)Montrer qu'il existe des réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ F_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Puis, calculer la valeur de α et β.

c)Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n$.

3)Compléter la fonction Python ci-dessous prenant en entrée :

− un entier naturel x,

− une liste L déjà triée dans l'ordre croissant dont le premier élément est inférieur ou égal à x et le dernier élément est strictement supérieur à x,

et qui renvoie le plus grand élément de L qui soit inférieur ou égal à x.

```
def recherche(x,L):
    k=0
    while L[k]<=x:
        k=.....
    return .....
```

Partie II

On s'intéresse au théorème suivant, appelé **théorème de Zeckendorf** :

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un unique $k \in \mathbf{N}^*$ et un unique k-uplet $(c_1, ..., c_k)$ d'entiers naturels vérifiant $c_1 \geq 2$ et $\forall i \in [\![1, k-1]\!], c_{i+1} > c_i + 1$, tels que

$$n = \sum_{i=1}^{k} F_{c_i}.$$

Cette décomposition s'appelle la **décomposition de Zeckendorf** de n.

Par exemple, $n = 4$ se décompose en $4 = 1 + 3 = F_2 + F_4$.
Donc $k = 2$ et $(c_1, c_2) = (2, 4)$.

Par ailleurs, $n = 17$ se décompose en $17 = 1 + 3 + 13 = F_2 + F_4 + F_7$.
Donc $k = 3$ et $(c_1, c_2, c_3) = (2, 4, 7)$.

4)On rappelle que la liste des premiers termes de la suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a été donnée dans la question 2).

a)En remarquant que $6 = 1+2+3 = F_2+F_3+F_4$ et que $6 = 1+5 = F_2+F_5$, donner la décomposition de Zeckendorf de 6 en justifiant votre choix.

b)Donner la décomposition de Zeckendorf du nombre 35.

c)Donner la décomposition de Zeckendorf du nombre 130.

5)Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose $A_n = \{i \in \mathbf{N}^* \mid F_i \leq n\}$.

a)Justifier que A_n est une partie non vide et finie de $\mathbf{N}^*$.

b)On pose $j = max(A_n)$, ce qui signifie que j est le plus grand entier appartenant à A_n.

Montrer que $j \geq 2$ et que $F_j \leq n < F_{j+1}$.

c)Montrer que $n - F_j < F_{j-1}$.

d)Supposons qu'il existe $l \in \mathbf{N}^*$ et un l-uplet $(d_1, ..., d_l)$ d'entiers naturels vérifiant :

$$d_1 \geq 2,\ \forall i \in [\![1, l-1]\!],\ d_{i+1} > d_i + 1 \text{ et } n - F_j = \sum_{i=1}^{l} F_{d_i}.$$

Montrer qu'il existe un entier k que l'on exprimera à l'aide de l et qu'il existe un k-uplet $(c_1, ..., c_k)$ d'entiers naturels tels que

$$c_1 \geq 2,\ \forall i \in [\![1, k-1]\!],\ c_{i+1} > c_i + 1 \text{ et } n = \sum_{i=1}^{k} F_{c_i}.$$

6)Que renvoie la fonction suivante ? Justifier soigneusement.

```
def Zeckendorf(n):
    i=0
    L=[fibo(i)]
    while L[-1]<=n:
        i=i+1
        L.append(fibo(i))
    k=n
    T=[]
    while k>0:
        f=recherche(k,L)
        T.append(f)
        k=k-f
    return T
```

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par :

$$\forall x \in [0,1[\,,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

1)Justifier que f est de classe C^∞ sur $[0,1[$.

2)a)Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0,1[\,,$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt.$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de f avec la convention $f^{(0)} = f$.

Indication : dans l'hérédité, effectuer une intégration par parties

b)Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0,1[\,,$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

c)En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0,1[\,,$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt.$$

3)Soit x un réel de $]0,1[$.

a)Montrer que la fonction $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{x-t}{1-t}$ est décroissante sur $[0,x]$.

b)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq \displaystyle\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt \leq 2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)$.

c)On admet que $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$ *(formule de Stirling)*

Montrer que $\dfrac{n+1}{2^{2n+2}}\dbinom{2n+2}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$.

d)En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt$.

4)Soit x un réel de $]0,1[$.

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$