DS3 - ecg2 - maths appliquées
mercredi 20/12/2023

Exercice 1

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

1)Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

2)En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout entier $p \geq n$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{p+1} \leq \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{p}.$$

3)Conclure que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1}.$$

4)Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ quand $n \to +\infty$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_1 = 1$ et l'égalité :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{n^2 u_n}{n^2 + u_n}.$$

5)Calculer u_2, u_3 et u_4.

6)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n$ existe et $u_n > 0$.

7)a)Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, puis convergente.

b)On note $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Justifier que $0 \leq L \leq 1$.

8)a)Etablir l'égalité :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{n^2}.$$

b)A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $L > 0$.

9)a)A l'aide de la question 8)a), montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\frac{1}{u_n} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}.$$

b)En déduire que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\frac{1}{L} - \frac{1}{u_n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

10)Conclure que $u_n \underset{+\infty}{=} L + \dfrac{L^2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Partie C

11)Compléter la fonction python ci-dessous afin qu'elle renvoie la valeur de u_n à l'appel de suite(n).

```
def suite(n):
    u=......
    for k in range(1,...):
        u=................
    return u
```

12)En utilisant les questions 3) et 9)b), montrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$|u_n - L| \leq \frac{u_n}{n-1}.$$

13)Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle renvoie une valeur approchée de L à epsilon près.

```
def valeur_approchee(epsilon):
    n=2
    while suite(n)/(n-1)>.....:
        n=.....
    return ......
```

Exercice 2

Les parties A, B et C sont indépendantes.

On donne $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 3 \approx 1,1$.

Partie A

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \geq 0,\ f_n(x) = \ln\left(1+x^n\right).$$

1)Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

2)Justifier que f_n est de classe C^2 sur $[0,+\infty[$. Etudier les variations de f_n.

3)Montrer que $\forall x \geq 0,\ f_n''(x) = \dfrac{nx^{n-2}\left(n-1-x^n\right)}{\left(1+x^n\right)^2}$.

4)On suppose $n \geq 2$ et on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n.
Etudier la convexité et la concavité de f_n.
Justifier que $\mathscr{C}_n$ admet un unique point d'inflexion I_n dont on précisera les coordonnées en fonction de n.

5)Tracer $\mathscr{C}_2$ ainsi que ses tangentes en l'origine et en I_2.

Partie B

On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \geq 0,\ g_n(x) = xln\left(1+x^n\right).$$

6)Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $g_n(x) = 1$ admet une unique solution $x_n \geq 0$.

7)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 1 < x_n < 2$.

8)Montrer que $\forall x \geq 1,\ g_{n+1}(x) \geq g_n(x)$.

9)En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, puis convergente vers une limite $L \in [1,2]$.

10)a)Montrer que si $L > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = +\infty$.

b)En partant de la définition de x_n, montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que $L = 1$, puis établir :

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n)^n = e-1.$$

c)Conclure que $x_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(e-1)}{n}$.

Partie C

On considère les suites d'intégrales $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(J_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définies par :

$$I_n = \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right) dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx.$$

1)Montrer que $\forall x \geq 0,\ 0 \leq \ln(1+x) \leq x$.

2)En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3)A l'aide du changement de variable $t = 1+x$, calculer $J_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$.

4)A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ l'égalité :

$$nJ_n = \ln 2 - I_n.$$

5)En déduire un équivalent simple de J_n quand $n \to +\infty$, puis préciser sa limite.

Exercice 3

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

1)Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
Montrer que si A est diagonalisable, alors A^2 est aussi diagonalisable.

On souhaite montrer par la suite que la réciproque est fausse.

On note I la matrice unité de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et on considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

2)Calculer A^2, puis vérifier que $A^4 = I$.

3)En déduire un polynôme annulateur de A.

4)Déterminer l'unique valeur propre de A et une base de son sous-espace propre.

5)Justifier que A n'est pas diagonalisable.

6)Soient $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que U, V et W sont des vecteurs propres de A^2.

7)En déduire que A^2 est diagonalisable.

Partie B

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ est *involutive* si $A^2 = I \quad (*)$

8)Trouver toutes les matrices involutives et diagonales de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

9)Donner un exemple de matrice involutive de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ non diagonale.

10)Dans cette question, A désigne une matrice involutive de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ avec $A \neq I$ et $A \neq -I$.

a)En utilisant $(*)$, montrer par l'absurde que $A - I$ et $A + I$ ne sont pas inversibles. Que peut-on conclure ?

b)Montrer que $\forall X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}),\ (A+I)X \in E_1(A)$ et $(A-I)X \in E_{-1}(A)$.

c)Vérifier que $\forall X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}),\ X = \dfrac{1}{2}(A+I)X - \dfrac{1}{2}(A-I)X$.

d)Soient $\mathscr{B}$ une base de $E_1(A)$, $\mathscr{C}$ une base de $E_{-1}(A)$ et $\mathscr{D} = \mathscr{B} \cup \mathscr{C}$.
A l'aide des questions précédentes, montrer que $\mathscr{D}$ est une famille génératrice de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, puis une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Conclure que A est diagonalisable.