TD17 - lois usuelles à densité

Exercice 1 ★ ☆ ☆☆
Soit $n \geq 1$ un entier et $a > 0$ un réel.
Soit X une variable aléatoire de densité f donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} ax^{n-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1)Déterminer a en fonction de n.

2)Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3)On prend $n = 1$. Reconnaître la loi de X.

Exercice 2 (edhec 2012) ★ ★ ☆☆
Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X.
Soit Y une variable aléatoire discrète telle que $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$
et $P(Y = -1) = P(Y = 1) = 1/2$.
On pose $Z = XY$ et on suppose X et Y **indépendantes**.

1)En appliquant la formule des probabilités totales pour le système complet $\big((Y = -1), (Y = 1)\big)$, montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F_Z(x) = \frac{1}{2}\big(F_X(x) - F_X(-x) + 1\big).$$

2)On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi de Z.

3)On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

a)Rappeler l'expression de $F_X(x)$, puis calculer $F_X(-x)$ suivant les valeurs de x.

b)En déduire $F_Z(x)$ en distinguant 4 cas, puis reconnaître la loi de Z.

Exercice 3 ★ ★ ☆☆
Lors d'une compétition d'athlétisme, on observe que :
− 10 % des javelots parcourent plus de 75 mètres,
− 25% des javelots parcourent moins de 50 mètres.

Soit X la variable aléatoire égale à la distance parcourue (en mètres) par le javelot.
On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où m et σ^2 sont inconnus.

1)Représenter l'allure d'une densité f de X, puis placer sur le graphique les valeurs 50, 75, m, ainsi que les pourcentages 10% et 25%.

2)a)Quelle est la loi suivie par $X^* = \dfrac{X - m}{\sigma}$?

b)Montrer que $\Phi\left(\dfrac{75 - m}{\sigma}\right) = 0,9$ et $\Phi\left(\dfrac{m - 50}{\sigma}\right) = 0,75$.

c)A l'aide de la table de la loi normale centrée réduite, en déduire une valeur approchée de m et σ.

Exercice 4 ★ ☆ ☆☆
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ de fonction de répartition Φ. Montrer que

$$\forall x > 0,\ P\big(|X| \leq x\big) = 2\Phi(x) - 1.$$

Exercice 5 ★ ★ ☆☆

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ et soit $Y = \sqrt{X}$.

1)Rappeler l'expression de la fonction de répartition F_X de X.

2)Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

Exercice 6 ★ ★ ☆☆

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires **indépendantes** de fonction de répartition respectives F_1 et F_2.

On pose $Y = min(X_1, X_2)$ et $Z = max(X_1, X_2)$.

1)Exprimer l'événement $(Z \leq x)$ à l'aide des événements $(X_1 \leq x)$ et $(X_2 \leq x)$.
En déduire que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F_Z(x) = F_1(x)F_2(x).$$

2)Exprimer l'événement $(Y > x)$ à l'aide des événements $(X_1 > x)$ et $(X_2 > x)$.
En déduire que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F_Y(x) = 1 - \big(1 - F_1(x)\big)\big(1 - F_2(x)\big).$$

3)On suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.
A l'aide de la question 2), montrer que $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, puis préciser $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 7 (edhec 2010) ★ ★ ☆☆

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1)Montrer que f est paire.

2)Montrer que f est une densité de probabilité.

3)Soit X une variable aléatoire de densité f et de fonction de répartition F.
Soit $Y = \ln|X|$.
On admet que Y est une variable aléatoire et on note G sa fonction de répartition.

a)X admet-elle une espérance ?

b)Montrer que $\forall x \in \mathbf{R},\ G(x) = F\left(e^x\right) - F\left(-e^x\right)$.

c)Sans chercher à calculer F, montrer que Y est une variable aléatoire à densité.
Préciser une densité g de Y, puis vérifier que Y suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

Exercice 8 (ecricome 2007) ★ ★ ☆☆

On estime que le temps de passage en caisse d'un magasin, exprimé en minutes, est une variable aléatoire T de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1)Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.
Donner une densité de X, puis rappeler la valeur de $E(X)$ et $V(X)$.

2)a)A l'aide de la question 1), montrer que f est une densité.

b)Quel est le temps moyen de passage en caisse ?

3)a)Démontrer que la fonction de répartition F de T est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 1-(x+1)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b)En déduire que la probabilité pour que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux minutes sachant qu'il est supérieur à une minute vaut $\dfrac{2e-3}{2e}$.

Exercice 9 ★ ★ ★☆

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et soit Φ sa fonction de répartition.

Soit Y la variable aléatoire définie par :

$$Y = \begin{cases} \lfloor X \rfloor & \text{si } X \geq 0 \\ \\ -1 & \text{si } X < 0 \end{cases}$$

1)Déterminer $Y(\Omega)$. Que peut-on conclure ?

2)a)Pour tout $k \in \mathbf{N}$, exprimer $P(Y = k)$ à l'aide de Φ.

b)Que vaut $P(Y = -1)$?

c)Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=-1}^{+\infty} P(Y = k) = 1$.

3)a)Montrer que $\forall k \in \mathbf{N},\ e^{-\frac{k^2}{2}} \leq \left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^k$.

b)En déduire que $\forall k \in \mathbf{N},\ P(Y = k) \leq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^k$.

c)Conclure que Y admet une espérance (ne pas chercher à la calculer).

Indications / Réponses

Exercice 1

1)L'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ se ramène à $\int_0^1 ax^{n-1}dx = 1$ et fournit $a = n$.

2)X admet une espérance car :

− d'une part, $\int_{-\infty}^{0} |xf(x)|dx$ et $\int_1^{+\infty} |xf(x)|dx$ convergent et valent 0,

− d'autre part, $\int_0^1 |xf(x)|dx$ converge car ce n'est pas une intégrale impropre.

$E(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 nx^n dx = \cdots = \dfrac{n}{n+1}$.

3)Pour $n = 1$, $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$.

Exercice 2

$$\begin{aligned}
1)F_Z(x) &= P(Z \leq x)\\
&= P\big((Y=-1)\cap(Z\leq x)\big) + P\big((Y=1)\cap(Z\leq x)\big) \qquad \text{[probas totales]}\\
&= P\big((Y=-1)\cap(XY\leq x)\big) + P\big((Y=1)\cap(XY\leq x)\big)\\
&= P\big((Y=-1)\cap(-X\leq x)\big) + P\big((Y=1)\cap(X\leq x)\big)\\
&= P\big((Y=-1)\cap(X\geq -x)\big) + P\big((Y=1)\cap(X\leq x)\big)\\
&= P(Y=-1)P(X\geq -x) + P(Y=1)P(X\leq x) \qquad \text{[indépendance]}\\
&= \frac{1}{2}\big(1 - P(X < -x)\big) + \frac{1}{2}P(X\leq x)\\
&= \frac{1}{2}\big(1 - F_X(-x) + F_X(x)\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(F_X(x) - F_X(-x) + 1\big).
\end{aligned}$$

2)En utilisant P6, on a : $F_Z(x) = \Phi(x)$. Donc $Z \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$.

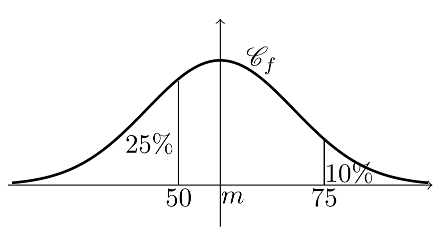
3)a)Le cours donne : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, puis $F_X(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$

3)b)On distingue les cas : $x < -1$, $-1 \leq x < 0$, $0 \leq x \leq 1$ et $x > 1$.

1) et 3)a) donnent : $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ Donc $Z \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$.

Exercice 3

1)Graphique



2)a)$X^* \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ d'après le THM3.

b)Pour la deuxième égalité, utiliser P6 : $\forall x \in \mathbf{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

c)On trouve $\dfrac{75-m}{\sigma} \approx 1,28$ et $\dfrac{m-50}{\sigma} \approx 0,67$, puis $\sigma \approx 12,82$ et $m \approx 58,59$.

<u>Exercice 4</u>

$P\big(|X| \leq x\big) = P\big(-x \leq X \leq x\big) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - \big(1 - \Phi(x)\big) = 2\Phi(x) - 1.$

<u>Exercice 5</u>

1)$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

2)$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\big(\sqrt{X} \leq x\big) = \begin{cases} P(X \leq x^2) = F_X(x^2) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

D'où $F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

<u>Exercice 6</u>

1)$(Z \leq x) = (X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x)$, puis on utilise l'indépendance de X_1 et X_2.
2)$(Y > x) = (X_1 > x) \cap (X_2 > x)$, puis $F_Y(x) = P(Y \leq x) = 1 - P(Y > x) = ...$

<u>Exercice 7</u>

2)Vérifier en particulier que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$, puis conclure par parité.
3)a)X n'admet pas d'espérance (intégrale de Riemann de paramètre 1).
b)$G(x) = P(Y \leq x) = P\big(\ln|X| \leq x\big) = P\big(|X| \leq e^x\big) = P\big(-e^x \leq X \leq e^x\big)$.
Donc $G(x) = F\big(e^x\big) - F\big(-e^x\big)$.
c)G est continue sur $\mathbf{R}$ comme composée et différence de fonctions continues.
F est dérivable aux points où f est continue donc sur $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$.
Or, $\pm e^x = \pm 1 \iff x = 0$.
G est donc dérivable sur $\mathbf{R}^*$ comme composée et différence de fonctions dérivables.
$\forall x \in \mathbf{R}^*,\ G'(x) = e^x F'\big(e^x\big) - \big(-e^x\big)F'\big(-e^x\big) = e^x f\big(e^x\big) + e^x f\big(-e^x\big) = 2e^x f\big(e^x\big)$,
par parité de f.
G' est continue sur $\mathbf{R}^*$ par produit et composée de fonctions continues.
Donc G est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^*$ et Y est donc à densité.
Une densité g de Y est donnée par $\forall x \in \mathbf{R}^*,\ g(x) = G'(x) = 2e^x f\big(e^x\big)$.
On trouve $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ Donc $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.

<u>Exercice 8</u>

1) $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 1$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2} = 1$.

2)a)$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \int_0^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx$
$= E(X) = 1$.

3)b)$P_{(T \geq 1)}(T \leq 2) = \dfrac{P\big((T \geq 1) \cap (T \leq 2)\big)}{P(T \geq 1)} = \dfrac{P\big(1 \leq T \leq 2\big)}{1 - P(T \leq 1)} = \dfrac{F(2) - F(1)}{1 - F(1)} = \cdots$

<u>Exercice 9</u>

1)$Y(\Omega) = [\![-1, +\infty[\![$. Donc Y est discrète infinie.
2)a)$P(Y = k) = P\big(\lfloor X \rfloor = k\big) = P\big(k \leq X < k+1\big) = \Phi(k+1) - \Phi(k)$.
b)$P(Y = -1) = P(X < 0) = \Phi(0) = 1/2$.
c)On télescope en utilisant 2)a).
3)b)Ecrire $P(Y = k) = \Phi(k+1) - \Phi(k) = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, puis utiliser 3)a).
3)c)Utiliser 3)b) pour comparer $\displaystyle\sum_{k \geq 0} kP(Y = k)$ avec une série dérivée première.