Concours blanc EDHEC

Exercice 1

On lance n fois une pièce équilibrée ($n \geq 2$), les lancers étant supposés indépendants.
On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

1. a) Déterminer, en argumentant soigneusement, lensemble $Z(\Omega)$

   b) Pour tout k de $Z(\Omega)$, calculer $P(Z=k)$. On distinguera les cas $k=0$ et $k \geq 1$.

   c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z=k) = 1$.

   d) On rappelle que l'instruction `rd.randint(0,2)` du module `numpy.random` renvoie de façon équiprobable 0 ou 1. On suppose pile codé par 1 et face par 0.
   Recopier et compléter la fonction Python suivante, prenant en paramètre le nombre n de lancers, et renvoyant la valeur de Z.

```
def lancer(n):
    z=0
    k=0
    lancer=0
    while lancer== ... and k<... :
        k=k+1
        lancer=rd.randint(0,2)
        if lancer==1:
            z= ....
    return ....
```

On dispose de $n+1$ urnes $U_0,\ U_1, \ldots, U_n$ telles que pour tout k de $\{0,1,...,n\}$ l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.

On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante :
− si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, Z prend la valeur k (avec $k \geq 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à lissue de ces tirages
− si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Déterminer $X(\Omega)$.

3. a) Déterminer, en distinguant les cas $i=0$ et $1 \leq i \leq n$, la probabilité $P_{(Z=0)}(X=i)$.

   b) Déterminer, en distinguant les cas $i=n$ et $0 \leq i \leq n-1$, la probabilité $P_{(Z=n)}(X=i)$.

   c) Pour tout k de $\{1,2,...,n-1\}$ déterminer, en distinguant les cas $0 \leq\ i \leq\ k$ et $k < i \leq n$, la probabilité conditionnelle $P_{(Z=k)}(X=i)$.

4. a) Montrer que $P(X=0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}$

   b) Montrer que $P(X=n) = \dfrac{1}{2^n}$

   c) Exprimer, pour tout i de $\{1,2,...,n-1\}$, $P(X=i)$ sous forme dune somme que l'on ne cherchera pas à réduire.

5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(X=i) = 1$.

Exercice 2

On note f la fonction définie, pour tout réel $x > 0$ par :

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

1. a) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n.

   b) En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

2. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

3. a) Établir que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k)$.

   b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}.$$

   c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple lorsque $n \longrightarrow +\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

Exercice 3

Quelques questions ont été modifiées par rapport au sujet initial.

Pour toute matrice M élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la matrice transposée de M,.

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On rappelle que $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note φ l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe $\varphi(M) = M + {}^tM$.

1. a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   b) Ecrire la matrice A de φ dans $\mathcal{B}$.

   c) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

2. a) Montrer que $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vect}(E_1,\ E_2 + E_3,\ E_4)$, puis établir que $\dim \mathrm{Im}(\varphi) = 3$.

   b) En déduire la dimension de $\ker \varphi$.

3. a) Calculer A^2, puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = 2^{n-1}A$.

   b) Déterminer les valeurs propres de A ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre associé.

4. Déterminer une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1} \quad \text{et} \quad {}^tP\,P = I_4.$$

Problème

Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{R}(p)$ si

$$X(\Omega) = \{-1, 1\}\,,\ P(X = 1) = p \text{ et } P(X = -1) = 1 - p.$$

Soit $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathscr{R}(p)$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la variable aléatoire T_n par :

$$T_n = \prod_{k=0}^{n} X_k.$$

On rappelle que si des événements A_1, ..., A_n sont mutuellement indépendants, on obtient en remplaçant un nombre quelconque d'entre eux par leur contraire, des événements qui sont encore mutuellement indépendants.

On rappelle enfin que si des variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, l'espérance de leur produit est égale au produit de leurs espérances.

1)Pour tout $k \in \mathbf{N}$, calculer $E(X_k)$ et $V(X_k)$ en fonction de p.

2)a)Préciser $T_n(\Omega)$. Calculer $E(T_n)$ en fonction de n et p.
En déduire la loi de T_n.

b)Pour tout couple $(n, m) \in \mathbf{N}^2$, avec $n > m$, calculer la covariance du couple (T_n, T_m) en fonction de p, m et n.

3)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $p_n = P(T_n = 1)$. Etablir la relation :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ p_{n+1} = (2p - 1)p_n + (1 - p).$$

Retrouver alors la loi de T_n.

4)On suppose dans cette question que $p = \dfrac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on considère les variables aléatoires W_n, Z_n et Y_n définies par :

$$W_n = X_n X_{n-1},\quad Z_n = \sum_{k=1}^{n} W_k \quad \text{et} \quad Y_n = \frac{1}{2}W_n + \frac{1}{2}.$$

a)Pour $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que Y_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

b)On considère deux variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli.
Montrer qu'elles sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.

c)Pour $n \geq 2$, montrer que Y_1, Y_2, ..., Y_n sont mutuellement indépendantes.

d)Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, exprimer Z_n en fonction de n et Y_1, Y_2, ..., Y_n.

Déduire pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ la valeur de $P(Z_n = 2k - n)$ en fonction de k et n.

5)Soit K une variable aléatoire indépendante de $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On pose pour tout $\omega \in \Omega$: $T(\omega) = \displaystyle\prod_{k=0}^{K(\omega)} X_k(\omega)$. On admet que T est une variable aléatoire.

a)Montrer que la série de terme général $E(T_n)P(K = n)$ converge et que

$$E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(T_n)P(K = n).$$

b)Calculer $E(T)$ et déterminer la loi de T.

6)Soit H une variable aléatoire indépendante de $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, soit D_k la variable aléatoire définie par : $D_k = HX_k$.

a)Rappeler l'expression de la fonction de répartition F_H de H.

b)Montrer que la fonction de répartition F_k de D_k vaut :

$$F_k(x) = \begin{cases} (1-p)e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ 1 - pe^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

c)En déduire que D_k est à densité et donner une densité f_k de D_k.

d)i. En utilisant H, justifiez sans calcul que $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^2}.$$

ii. A l'aide d'un changement de variable, en déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{\lambda x}dx$ converge et préciser sa valeur.

iii. Conclure enfin que D_k admet une espérance et la calculer.