Correction essec II 2017

Partie I : indice de Gini

1)a)La propriété $(*)$ traduit le fait que $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de ses cordes.

b)Pour une fonction f de classe C^1 sur $[0,1]$, f est convexe sur $[0,1]$ si et seulement si f' est croissante sur $[0,1]$.

2)Soit $f \in E$.

a)Soient $(t_1,t_2) \in [0,1]^2$ et $\lambda \in [0,1]$. Comme f est convexe sur $[0,1]$, on a :

$f\big(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2\big) \leq \lambda f(t_1) + (1-\lambda)f(t_2)$,

$-f\big(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2\big) \geq -\lambda f(t_1) - (1-\lambda)f(t_2)$,

$\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2 - f\big(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2\big) \geq \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2 - \lambda f(t_1) - (1-\lambda)f(t_2)$,

$\tilde{f}\big(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2\big) \geq \lambda\big(t_1 - f(t_1)\big) + (1-\lambda)\big(t_2 - f(t_2)\big)$,

$\tilde{f}\big(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2\big) \geq \lambda \tilde{f}(t_1) + (1-\lambda)\tilde{f}(t_2)$.

$-\tilde{f}\big(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2\big) \leq -\lambda \tilde{f}(t_1) - (1-\lambda)\tilde{f}(t_2)$.

Donc $-\tilde{f}$ est convexe sur $[0,1]$, ce qui prouve que $\tilde{f}$ est concave sur $[0,1]$.

b)$I(f) = 2\displaystyle\int_0^1 \big(t - f(t)\big)dt = 2\int_0^1 t dt - 2\int_0^1 f(t)dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - 2\int_0^1 f(t)dt$

$= 1 - 2\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

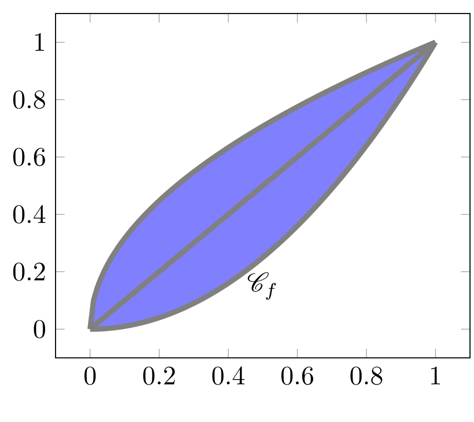
c)f est convexe sur $J = [0,1]$, elle vérifie $(*)$. En prenant en particulier $t_1 = 1$ et $t_2 = 0$, on obtient pour tout $\lambda \in [0,1]$:

$f\big(\lambda \times 1 + (1-\lambda) \times 0\big) \leq \lambda f(1) + (1-\lambda)f(0)$,

$f(\lambda) \leq \lambda \times 1 + (1-\lambda) \times 0$, c'est-à-dire $f(\lambda) \leq \lambda$.

Quitte à renommer λ en t, on a donc $\forall t \in [0,1]\,,\ f(t) \leq t$.

✓ On pouvait évoquer que $y = t$ est une corde de $\mathscr{C}_f$ et utiliser 1)a.



$I(f)$ est le double de l'aire comprise entre $\mathscr{C}_f$ et la droite $y = t$, c'est-à-dire l'aire pleine pour raisons de symétrie.

3)Posons $f : t \mapsto t^2$ sur $[0,1]$.

a)f est convexe sur $[0,1]$ car $\forall t \in [0,1]\,,\ f''(t) = 2 > 0$.
De plus, f est continue sur $[0,1]$ (polynôme) et vérifie $f(0) = 0$ ainsi que $f(1) = 1$.
Enfin, si $0 \le t \le 1$, alors $0^2 \le t^2 \le 1^2$ par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbf{R}_+$.
Donc f prend ses valeurs dans $[0,1]$.
Ainsi, $f \in E$.

b)La question 2)b) donne :

$$I(f) = 1 - 2\int_0^1 f(t)dt = 1 - 2\int_0^1 t^2 dt = 1 - 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

4)a)D'après la question 2)c), on a $\forall t \in [0,1]\,,\ t - f(t) \ge 0$.
En intégrant entre les bornes croissantes 0 et 1, on déduit : $\displaystyle\int_0^1 \big(t - f(t)\big)dt \ge 0$.
D'où $I(f) \ge 0$.

b)• Si $\forall t \in [0,1]\,,\ f(t) = t$, on a $\forall t \in [0,1]\,,\ t - f(t) = 0$.
Puis en intégrant : $I(f) = 0$.

• Réciproquement, si $I(f) = 0$, on a $\displaystyle\int_0^1 \big(t - f(t)\big)dt = 0$. La positivité et la continuité de la fonction $t \mapsto \big(t - f(t)\big)$ sur $[0,1]$ entraîne $\forall t \in [0,1]\,,\ f(t) - t = 0$, c'est-à-dire, $\forall t \in [0,1]\,,\ f(t) = t$.

c)Partons de $I(f) = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 f(t)dt \qquad (1)$

f étant continue et positive ou nulle sur $[0,1]$, on a :
$\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0 \iff \forall t \in [0,1]\,,\ f(t) = 0$.

Comme $f(1) = 1 \neq 0$, l'équivalence ci-dessus donne $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt \neq 0$.

Or, $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt \ge 0$ par positivité de f sur $[0,1]$.

On a donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt > 0$, puis $I(f) < 1$ grâce à (1).

d)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $f_n : t \mapsto t^n$ sur $[0,1]$.

(i)$I(f_n) = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt = 1 - 2\int_0^1 t^n dt = 1 - 2\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{n+1}$.

(ii)Soit A un réel tel que $0 \le A < 1$.

$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ I(f_n) < 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I(f_n) = 1$.

Il existe donc $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $A < I\left(f_{n_0}\right) < 1$.
Enfin, $f_{n_0} \in E$ car :
f_{n_0} est continue sur $[0,1]$,
f_{n_0} est convexe sur $[0,1]$, puisque $\forall t \in [0,1]\,,\ f''_{n_0}(t) = n_0(n_0 - 1)t^{n_0-2} \ge 0$,
$f_{n_0}(0) = 0$ et $f_{n_0}(1) = 1$.
f_{n_0} prend ses valeurs dans $[0,1]$.

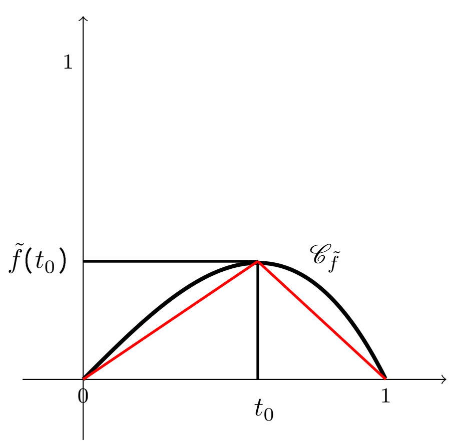
5)a)On sait d'après 2)c) que $\forall t \in [0,1]\,,\ \tilde{f}(t) \geq 0$.
Distinguons deux cas :

– $\tilde{f}$ est nulle sur $[0,1]$
Alors, n'importe quel réel $t_0 \in \,]0,1[$ convient,

– $\tilde{f}$ n'est pas la fonction nulle sur $[0,1]$
$\tilde{f} : t \mapsto t - f(t)$ est continue sur le segment $[0,1]$. D'après le théorème des bornes atteintes, elle admet donc un maximum atteint en un certain réel $t_0 \in [0,1]$.
On a alors $\forall t \in [0,1]\,,\ 0 \leq \tilde{f}(t) \leq \tilde{f}(t_0)$.
Comme $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = 0$, les possibilités $t_0 = 0$ ou $t_0 = 1$ sont à exclure, sinon $\tilde{f}$ serait nulle sur $[0,1]$. Donc $t_0 \in \,]0,1[$.

b)La corde passant par les points $\left(0, \tilde{f}(0)\right) = (0,0)$ et $\left(t_0, \tilde{f}(t_0)\right)$ a pour coefficient directeur $\dfrac{\tilde{f}(t_0)}{t_0}$.
Son équation est : $y = \dfrac{\tilde{f}(t_0)}{t_0} t$, c'est-à-dire $y = \tilde{f}(t_0)\dfrac{t}{t_0}$.
D'après 2)a), $\tilde{f}$ est concave sur $[0,1]$ donc sur $[0,t_0]$. Donc $\mathscr{C}_{\tilde{f}}$ est au-dessus de la corde précédente.
Ainsi, $\forall t \in [0,t_0]\,,\ \tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0)\dfrac{t}{t_0}$.

c)La corde passant par les points $\left(t_0, \tilde{f}(t_0)\right)$ et $\left(1, \tilde{f}(1)\right) = (1,0)$ a pour coefficient directeur $\dfrac{\tilde{f}(t_0)}{t_0 - 1}$.
Son équation est de la forme : $y = \dfrac{\tilde{f}(t_0)}{t_0 - 1} t + b$, où $b \in \mathbf{R}$.
Comme le point $(1,0)$ est sur cette corde, on a : $0 = \dfrac{\tilde{f}(t_0)}{t_0 - 1} \times 1 + b$, d'où $b = \dfrac{-\tilde{f}(t_0)}{t_0 - 1}$.
L'équation de la corde est donc $y = \dfrac{\tilde{f}(t_0)}{t_0 - 1}(t-1)$, soit $y = \tilde{f}(t_0)\dfrac{t-1}{t_0 - 1}$.
$\tilde{f}$ est concave sur $[t_0,1]$. Donc $\mathscr{C}_{\tilde{f}}$ est au-dessus de la corde précédente.
Ainsi, $\forall t \in [t_0,1]\,,\ \tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0)\dfrac{t-1}{t_0 - 1}$.



d)En intégrant l'inégalité 5)b) entre les bornes croissantes 0 et t_0, on a :

$$\int_0^{t_0} \tilde{f}(t)dt \geq \int_0^{t_0} \tilde{f}(t_0)\frac{t}{t_0}dt$$

avec $\displaystyle\int_0^{t_0} \tilde{f}(t_0)\frac{t}{t_0}dt = \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0}\int_0^{t_0} tdt = \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{t_0} = \tilde{f}(t_0)\frac{t_0}{2}$.

Donc $\displaystyle\int_0^{t_0} \tilde{f}(t)dt \geq \tilde{f}(t_0)\frac{t_0}{2} \quad (1)$

De même, en intégrant l'inégalité 5)c) entre les bornes croissantes t_0 et 1, on a :

$$\int_{t_0}^1 \tilde{f}(t)dt \geq \int_{t_0}^1 \tilde{f}(t_0)\frac{t-1}{t_0-1}dt$$

avec $\displaystyle\int_{t_0}^1 \tilde{f}(t_0)\frac{t-1}{t_0-1}dt = \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0-1}\int_{t_0}^1 (t-1)dt = \frac{\tilde{f}(t_0)}{t_0-1}\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_{t_0}^1 = \tilde{f}(t_0)\frac{1-t_0}{2}$.

Donc $\displaystyle\int_{t_0}^1 \tilde{f}(t)dt \geq \tilde{f}(t_0)\frac{1-t_0}{2} \quad (2)$

Par somme de (1) et (2), puis par la relation de Chasles, on a : $\displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)dt \geq \frac{\tilde{f}(t_0)}{2}$.

D'où, $I(f) \geq \tilde{f}(t_0)$.

Partie II : le cas à densité

6)a)La fonction $v \mapsto vg(v)$ est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} vg(v)dv > 0$. Ainsi, $m > 0$.

b)g est continue sur $[0, +\infty[$ donc G est une primitive de g sur $[0, +\infty[$.
G est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \geq 0,\ G'(x) = g(x) > 0$.

c)G est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $G\big([0, +\infty[\big)$.

Or, $G(0) = \displaystyle\int_0^0 g(v)dv = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = \int_0^{+\infty} g(v)dv = 1$.

Donc $G\big([0, +\infty[\big) = [0, 1[$.

Ainsi, G est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$.

d)G^{-1} a même variation que G, elle est donc strictement croissante sur $[0, 1[$.

7)a)Soit $t \in [0, 1[$. Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^t G^{-1}(u)du$, posons $u = G(v)$ ou $v = G^{-1}(u)$.

• bornes :
$u = 0 \iff v = G^{-1}(0) \iff v = 0 \quad$ (en effet, $G^{-1}(0) = 0$ car $G(0) = 0$),
$u = t \iff v = G^{-1}(t)$.

• fonction :
$G^{-1}(u) = v$

• élément différentiel :
$du = G'(v)dv = g(v)dv$.

G est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ donc aussi sur $\left[0, G^{-1}(t)\right]$. Le changement de variable est donc licite et donne :

$$\int_0^t G^{-1}(u)du = \int_0^{G^{-1}(t)} vg(v)dv.$$

b) $\displaystyle\lim_{t\to1^-} G^{-1}(t) = +\infty$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} vg(v)dv$ converge et vaut m.

Donc $\displaystyle\lim_{t\to1^-} \int_0^{G^{-1}(t)} vg(v)dv = m$.

Donc $\displaystyle\lim_{t\to1^-} \int_0^t G^{-1}(u)du = m$, ce qui prouve que $\displaystyle\int_0^1 G^{-1}(u)du$ converge et vaut m.

8)a)i)La fonction $t \mapsto \displaystyle\int_0^t G^{-1}(u)du$, définie pour $t \in [0, 1[$ est continue sur $[0, 1[$ car c'est une primitive de G^{-1} sur $[0, 1[$. Donc f est continue sur $[0, 1[$.

Puis, $\displaystyle\lim_{t\to1} f(t) = \frac{1}{m}\int_0^1 G^{-1}(u)du = \frac{1}{m} \times m = 1 = f(1)$. Donc f est continue en 1.

Donc f est continue sur $[0, 1]$.

ii)La fonction $t \mapsto \displaystyle\int_0^t G^{-1}(u)du$ est dérivable sur $[0, 1[$ car c'est une primitive de G^{-1} sur $[0, 1[$.

Donc f est dérivable sur $[0,1[$ et $\forall t \in [0,1[\,,\; f'(t) = \dfrac{1}{m} \times G^{-1}(t)$.

D'après 6)c), G^{-1} est croissante sur $[0,1[$ et $m > 0$ d'après 6)a).

Cela entraîne que f' est croissante sur $[0,1[$. Donc f est convexe sur $[0,1[$.

iii)On vérifie tous les critères :

- $f(0) = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_0^0 G^{-1}(u)du = 0$ et $f(1) = 1$ par énoncé.
- f est continue sur $[0,1]$.
- $\forall t \in [0,1[\,,\; f'(t) = \dfrac{1}{m} \times G^{-1}(t) \geq 0$ car $m > 0$ et G^{-1} à valeurs dans $[0,+\infty[$.

Donc f est croissante sur $[0,1[$; elle est même croissante sur $[0,1]$ du fait qu'elle est continue en 1.
Donc $\forall x \in [0,1]\,,\; f(0) \leq f(x) \leq f(1)$, c'est-à-dire $0 \leq f(x) \leq 1$.
Donc f est bien à valeurs dans $[0,1]$.

- f est convexe sur $[0,1]$.

Ainsi, $f \in E$.

b)Soit $A \in [0,1[$. Faisons une intégration par parties sur $\displaystyle\int_0^A f(t)dt$ en posant :

$a(t) = f(t)$ $\qquad\qquad$ $b'(t) = 1$,

$a'(t) = f'(t) = \dfrac{1}{m} \times G^{-1}(t)$ $\qquad\qquad$ $b(t) = t$.

a et b sont de classe C^1 sur $[0,A]$ car G^{-1} est continue sur $[0,1[$ donc sur $[0,A]$.
L'IPP est licite et donne :

$$\int_0^A f(t)dt = \left[tf(t)\right]_0^A - \int_0^A \frac{1}{m}.tG^{-1}(t)dt = Af(A) - \frac{1}{m}\int_0^A tG^{-1}(t)dt \quad (*)$$

Dans $\displaystyle\int_0^A tG^{-1}(t)dt$, posons $t = G(v)$ ou encore $v = G^{-1}(t)$.

Cela donne : $\displaystyle\int_0^A tG^{-1}(t)dt = \int_0^{G^{-1}(A)} G(v)vG'(v)dv = \int_0^{G^{-1}(A)} vg(v)G(v)dv$.

En reportant dans $(*)$, on déduit :

$$\int_0^A f(t)dt = Af(A) - \frac{1}{m}\int_0^{G^{-1}(A)} vg(v)G(v)dv \quad (**)$$

$\displaystyle\lim_{A\to1^-} Af(A) = f(1) = 1$ par continuité de f en 1,

$\displaystyle\lim_{A\to1^-}\int_0^A f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$ car $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ converge (f est continue sur $[0,1]$).

Donc $\displaystyle\lim_{A\to1^-}\int_0^{G^{-1}(A)} vg(v)G(v)dv$ existe.

Comme $\displaystyle\lim_{A\to1^-} G^{-1}(A) = +\infty$, cette limite vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} vg(v)G(v)dv$.

En passant à la limite dans $(**)$ quand $A \to 1^-$, on a :

$$\int_0^1 f(t)dt = 1 - \frac{1}{m}\int_0^{+\infty} vg(v)G(v)dv.$$

Enfin, la question 2)b) donne :

$I(f) = 1 - 2\int_0^1 f(t)dt = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{m}\int_0^{+\infty} vg(v)G(v)dv\right)$.

D'où $I(f) = -1 + \frac{2}{m}\int_0^{+\infty} vg(v)G(v)dv$.

9)a)$\forall x \geq 0,\ \int_0^x g(v)dv = \int_0^x \lambda e^{-\lambda v}dv = \left[-e^{-\lambda v}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$.

$\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 0$ car $\lambda > 0$ donc $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x g(v)dv = 1$.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} g(v)dv$ converge et vaut 1.

b)$\forall x \geq 0,\ G(x) = \int_0^x g(v)dv = \int_0^x \lambda e^{-\lambda v} = \left[-e^{-\lambda v}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$.

c)Pour tout $u \in [0,1[$, on a :

$x = G^{-1}(u) \iff G(x) = u \iff 1 - e^{-\lambda x} = u \iff e^{-\lambda x} = 1 - u$

$\iff -\lambda x = \ln(1-u) \iff x = -\frac{\ln(1-u)}{\lambda}$.

Donc $G^{-1}(u) = -\frac{\ln(1-u)}{\lambda}$.

d)$m = \int_0^{+\infty} vg(v)dv = \int_0^{+\infty} v\lambda e^{-\lambda v}dv$.

Pour $A > 0$, on fait une intégration par parties sur $\int_0^A v\lambda e^{-\lambda v}dv$ en posant :

$h(v) = v \qquad i'(v) = \lambda e^{-\lambda v}$

$h'(v) = 1 \qquad i(v) = -e^{-\lambda v}$

h et i sont de classe C^1 sur $[0, A]$. L'IPP est licite et donne :

$$\begin{aligned}\int_0^A v\lambda e^{-\lambda v}dv &= \left[-ve^{-\lambda v}\right]_0^A - \int_0^A -e^{-\lambda v}dv\\ &= -Ae^{-\lambda A} - \left[\frac{e^{-\lambda v}}{\lambda}\right]_0^A\\ &= -Ae^{-\lambda A} - \frac{e^{-\lambda A}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

$\lim_{A\to+\infty} Ae^{-\lambda A} = 0$ par croissances comparées et $\lim_{A\to+\infty}\frac{e^{-\lambda A}}{\lambda} = 0$.

Donc $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A v\lambda e^{-\lambda v}dv = \frac{1}{\lambda}$. Ainsi, $m = \frac{1}{\lambda}$.

e)$\forall t \in [0,1[\,,\ f(t) = \frac{1}{m}\int_0^t G^{-1}(u)du = \lambda\int_0^t -\frac{\ln(1-u)}{\lambda}du = -\int_0^t \ln(1-u)du$.

f)$\forall t \in [0,1[$, $f(t) = -\int_0^t \ln(1-u)du$

$$\begin{aligned}
&= -\int_1^{1-t} \ln(v)(-dv) \quad \text{en posant } v = 1-u \\
&= \int_1^{1-t} \ln(v)dv \\
&= \left[vln(v) - v\right]_1^{1-t} \\
&= (1-t)\ln(1-t) + t.
\end{aligned}$$

g)L'intégrale $\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)dt$ est impropre en 1.

Pour $A \in [0,1[$, effectuons une IPP sur $\int_0^A (1-t)\ln(1-t)dt$ en posant :

$h'(t) = 1-t \qquad i(t) = \ln(1-t)$

$h(t) = -\frac{(1-t)^2}{2} \qquad i'(t) = -\frac{1}{1-t}$

h et i sont de classe C^1 sur $[0,A]$. L'IPP est licite et donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^A (1-t)\ln(1-t)dt &= \left[-\frac{(1-t)^2}{2}\ln(1-t)\right]_0^A - \int_0^A \frac{(1-t)^2}{2} \times \frac{1}{1-t}dt \\
&= -\frac{(1-A)^2}{2}\ln(1-A) - \frac{1}{2}\int_0^A (1-t)dt \\
&= -\frac{(1-A)^2}{2}\ln(1-A) - \frac{1}{2}\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^A \\
&= -\frac{(1-A)^2}{2}\ln(1-A) - \frac{A}{2} + \frac{A^2}{4}.
\end{aligned}$$

$\lim_{A\to 1^-} \frac{(1-A)^2}{2}\ln(1-A) = \lim_{B\to 0^+} \frac{B^2}{2}\ln B = 0$ par croissances comparées,

et $\lim_{A\to 1^-}\left(-\frac{A}{2} + \frac{A^2}{4}\right) = -\frac{1}{4}$.

Donc $\lim_{A\to 1^-} \int_0^A (1-t)\ln(1-t)dt = -\frac{1}{4}$.

Ainsi, $\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)dt$ converge et vaut $-\frac{1}{4}$.

✓ Dans l'IPP, on pouvait prendre $h(t) = t - \frac{t^2}{2}$, mais le choix fait ici simplifie les calculs.

h)Les questions 9)f) et 9)g) donnent :

$I(f) = 2\int_0^1 \big(t - f(t)\big)dt = -2\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)dt = -2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Partie III : application à une population

10)$\forall i \in [\![1,n]\!],\ p_i \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i = \frac{1}{N} \times N = 1.$

Donc $P = (p_i)_{1\leq i\leq n}$ est une distribution de probabilités.

Même raisonnement pour $Q = (q_i)_{1\leq i\leq n}$ et $R = (r_i)_{1\leq i\leq n}$.

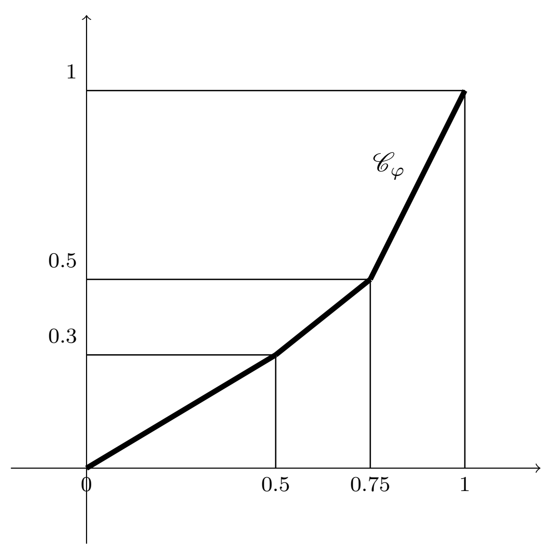
11)a)$P_0 = 0$ et $Q_0 = 0$.

$P_1 = p_1 = \dfrac{1}{2}$ et $Q_1 = q_1 = \dfrac{3}{10}$.

$P_2 = p_1 + p_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ et $Q_2 = q_1 + q_2 = \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{2}$.

$P_3 = P_2 + p_3 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$ et $Q_3 = Q_2 + q_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$.

$\mathscr{C}_\varphi$ est la ligne brisée passant par les points $(0,0)$, $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{10}\right)$, $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ et $(1,1)$.



b)$\forall i \in [\![1,n]\!],\ u_i = \dfrac{Q_i - Q_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} = \dfrac{q_i}{p_i} = \dfrac{\frac{x_i}{X}}{\frac{n_i}{N}} = \dfrac{\frac{x_i}{n_i}}{\frac{X}{N}} = \dfrac{\epsilon_i}{\epsilon}.$

c)Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, φ est affine sur $[P_i, P_{i+1}]$.
Sa courbe représentative sur $[P_i, P_{i+1}]$ est une droite dont la pente est u_{i+1}.

Sur $[P_i, P_{i+1}]$, φ est donc de la forme : $\varphi(t) = u_{i+1}t + b$.

Puis, $\varphi(P_i) = Q_i$ donne : $Q_i = u_{i+1}P_i + b$, d'où $b = Q_i - u_{i+1}P_i$.

En reportant dans l'expression de φ, on déduit :

$\forall t \in [P_i, P_{i+1}],\ \varphi(t) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i$.

d)• $\varphi(0) = \varphi(P_0) = Q_0 = 0$ et $\varphi(1) = \varphi(P_n) = Q_n = 1$,

• φ est à valeurs dans $[0,1]$ et convexe d'après l'énoncé,

• φ est affine donc continue sur $[P_i, P_{i+1}]$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.
Elle est donc continue sur $\bigcup_{i=0}^{n-1}[P_i, P_{i+1}]$, c'est-à-dire sur $[0,1]$.
Ainsi, $\varphi \in E$.
e)Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)dt &= \int_{P_i}^{P_{i+1}} \left(u_{i+1}(t-P_i) + Q_i\right)dt \\
&= \left[u_{i+1}\frac{(t-P_i)^2}{2} + Q_i t\right]_{P_i}^{P_{i+1}} \\
&= u_{i+1}\frac{(P_{i+1}-P_i)^2}{2} + Q_i(P_{i+1}-P_i) \\
&= u_{i+1}\frac{p_{i+1}^2}{2} + Q_i p_{i+1} \\
&= \frac{q_{i+1}p_{i+1}}{2} + Q_i p_{i+1} \\
&= \frac{p_{i+1}(q_{i+1}+2Q_i)}{2} \\
&= \frac{(P_{i+1}-P_i)(Q_{i+1}+Q_i)}{2}.
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
I(\varphi) &= 1 - 2\int_0^1 \varphi(t)dt \\
&= 1 - 2\sum_{i=0}^{n-1}\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)dt \quad \text{relation de Chasles} \\
&= 1 - 2\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(P_{i+1}-P_i)(Q_{i+1}+Q_i)}{2} \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{n-1}(P_{i+1}-P_i)(Q_{i+1}+Q_i).
\end{aligned}$$

12)a) $\forall i \in [\![1, n]\!],\ v_i = \dfrac{R_i - R_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} = \dfrac{r_i}{p_i} = \dfrac{\frac{y_i}{Y}}{\frac{n_i}{N}} = \dfrac{\frac{y_i}{n_i}}{\frac{Y}{N}} = \dfrac{\frac{n_i - x_i}{n_i}}{\frac{N-X}{N}} = \dfrac{1-\frac{x_i}{n_i}}{1-\frac{X}{N}} = \dfrac{1-\epsilon_i}{1-\epsilon}.$

b)i)Pour tous $(t_1, t_2) \in [0,1]^2$ et pour tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned}
\psi^*(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= 1 - \psi\big(1 - (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)\big) \\
&= 1 - \psi\big(\lambda(1-t_1) + (1-\lambda)(1-t_2)\big) \quad \text{car } 1 = \lambda + (1-\lambda)
\end{aligned}$$

Comme ψ est concave, $-\psi$ est convexe. De plus, $1-t_1$ et $1-t_2$ sont dans $[0,1]$.
On déduit alors successivement :

$-\psi\big(\lambda(1-t_1) + (1-\lambda)(1-t_2)\big) \leq -\lambda\psi(1-t_1) - (1-\lambda)\psi(1-t_2)$

$1 - \psi\big(\lambda(1-t_1) + (1-\lambda)(1-t_2)\big) \leq 1 - \lambda\psi(1-t_1) - (1-\lambda)\psi(1-t_2)$

$\psi^*(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda\big(1 - \psi(1-t_1)\big) + (1-\lambda)\big(1-\psi(1-t_2)\big)$

$\psi^*(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda\psi^*(t_1) + (1-\lambda)\psi^*(t_2)$.

Donc ψ^* est convexe sur $[0,1]$.

b)ii)Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$.

$t \in [\Pi_{i-1}, \Pi_i] \iff \Pi_{i-1} \leq t \leq \Pi_i \iff 1 - \Pi_i \leq 1 - t \leq 1 - \Pi_{i-1}$
$\iff P_{n-i} \leq 1 - t \leq P_{n-i+1} \iff 1 - t \in [P_{n-i}, P_{n-i+1}]$.

La fonction $t \mapsto 1-t$ est affine sur $[\Pi_{i-1}, \Pi_i]$ et prend ses valeurs dans $[P_{n-i}, P_{n-i+1}]$,
la fonction ψ est affine sur $[P_{n-i}, P_{n-i+1}]$.

Par composée, la fonction $t \mapsto \psi(1-t)$ est affine sur $[\Pi_{i-1}, \Pi_i]$.

On déduit immédiatement que ψ^* est affine sur $[\Pi_{i-1}, \Pi_i]$.

b)iii)Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la pente de ψ^* sur $[\Pi_{i-1}, \Pi_i]$ est :

$$\begin{aligned}
\frac{\psi^*(\Pi_i) - \psi^*(\Pi_{i-1})}{\Pi_i - \Pi_{i-1}} &= \frac{(1 - \psi(1 - \Pi_i)) - (1 - \psi(1 - \Pi_{i-1})}{\Pi_i - \Pi_{i-1}} \\
&= \frac{\psi(1 - \Pi_{i-1}) - \psi(1 - \Pi_i)}{(1 - P_{n-i}) - (1 - P_{n-i+1})} \\
&= \frac{\psi(P_{n-i+1}) - \psi(P_{n-i})}{P_{n-i+1} - P_{n-i}} \\
&= \frac{R_{n-i+1} - R_{n-i}}{P_{n-i+1} - P_{n-i}} \\
&= v_{n-i+1} \quad \text{d'après 12)a).} \\
&= \frac{1 - \epsilon_{n-i+1}}{1 - \epsilon}.
\end{aligned}$$

b)iv)$P_0 = 0$ et $R_0 = 0$.
$P_1 = p_1 = \dfrac{1}{2}$ et $R_1 = r_1 = \dfrac{7}{10}$.

$P_2 = p_1 + p_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ et $R_2 = r_1 + r_2 = \dfrac{7}{10} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{9}{10}$.

$P_3 = P_2 + p_3 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$ et $R_3 = R_2 + r_3 = \dfrac{9}{10} + \dfrac{1}{10} = 1$.

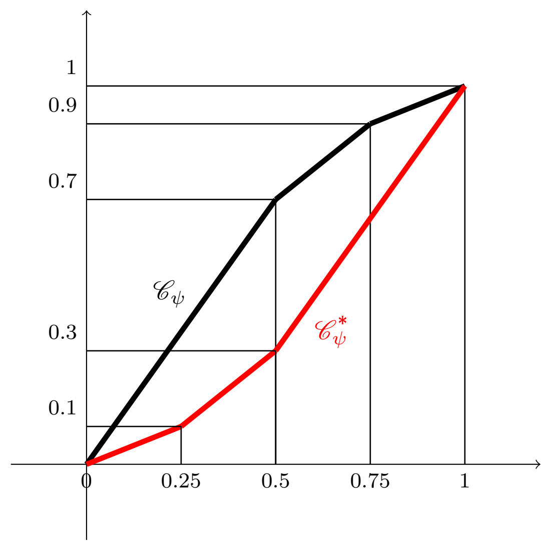
$\mathscr{C}_\psi$ est la ligne brisée passant par les points $(0,0)$, $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{10}\right)$, $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{9}{10}\right)$ et $(1,1)$.

$\Pi_0 = 1 - P_3 = 0$ et $\psi^*(\Pi_0) = \psi^*(1 - P_3) = 1 - \psi(P_3) = 1 - R_3 = 0$.
$\Pi_1 = 1 - P_2 = \dfrac{1}{4}$ et $\psi^*(\Pi_1) = \psi^*(1 - P_2) = 1 - \psi(P_2) = 1 - R_2 = \dfrac{1}{10}$.

$\Pi_2 = 1 - P_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\psi^*(\Pi_2) = \psi^*(1 - P_1) = 1 - \psi(P_1) = 1 - R_1 = \dfrac{3}{10}$.

$\Pi_3 = 1 - P_0 = 1$ et $\psi^*(\Pi_3) = \psi^*(1 - P_0) = 1 - \psi(P_0) = 1 - R_0 = 1$.

$\mathscr{C}_{\psi^*}$ est la ligne brisée passant par les points $(0,0)$, $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{10}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{10}\right)$ et $(1,1)$.



13)a)On utilise les questions 11)b) et 12)b)iii.

• φ est affine sur $[P_0, P_1] = [0, P_1]$ et son coefficient directeur est u_1,
ψ^* est affine sur $[\Pi_0, \Pi_1] = [0, \Pi_1]$ et son coefficient directeur est v_n.
φ et ψ^* étant égales et affines sur $[P_0, P_1] \cap [\Pi_0, \Pi_1]$, elles ont le même coefficient directeur.
Donc $u_1 = v_1$, c'est-à-dire : $\dfrac{\epsilon_1}{\epsilon} = \dfrac{1-\epsilon_n}{1-\epsilon}$.

• φ est affine sur $[P_{n-1}, P_n] = [P_{n-1}, 1]$ et son coefficient directeur est u_n,
ψ^* est affine sur $[\Pi_{n-1}, \Pi_n] = [\Pi_{n-1}, 1]$ et son coefficient directeur est v_1.
φ et ψ^* étant égales et affines sur $[P_{n-1}, P_n] \cap [\Pi_{n-1}, \Pi_n]$, elles ont le même coefficient directeur.
Donc $u_n = v_n$, c'est-à-dire : $\dfrac{\epsilon_n}{\epsilon} = \dfrac{1-\epsilon_1}{1-\epsilon}$.

b)Des égalités ci-dessus, on se ramène au système :

$$\begin{cases} (1-\epsilon)\epsilon_1 & = \epsilon(1-\epsilon_n) \\ (1-\epsilon)\epsilon_n & = \epsilon(1-\epsilon_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\epsilon)\epsilon_1 + \epsilon\epsilon_n & = \epsilon \qquad L_1 \\ \epsilon\epsilon_1 + (1-\epsilon)\epsilon_n & = \epsilon \qquad L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\epsilon)\epsilon_1 + \epsilon\epsilon_n & = \epsilon \qquad & L_1 \\ \left(\epsilon^2 - (1-\epsilon)^2\right)\epsilon_n & = \epsilon^2 - \epsilon(1-\epsilon) \qquad & L_2 \leftarrow \epsilon L_1 - (1-\epsilon)L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\epsilon)\epsilon_1 + \epsilon\epsilon_n & = \epsilon \\ (2\epsilon - 1)\,\epsilon_n & = \epsilon(2\epsilon - 1) \end{cases}$$

Comme $\epsilon \neq 1/2$, on a $2\epsilon - 1 \neq 0$. La dernière équation donne : $\epsilon_n = \epsilon$, puis $\epsilon_1 = \epsilon$.

c)D'après $(**)$, on a : $\epsilon_1 \leq \epsilon_2 \leq \cdots \leq \epsilon_n$. Comme $\epsilon_1 = \epsilon_n = \epsilon$, on déduit que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \epsilon_i = \epsilon$ ou encore $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \dfrac{x_i}{n_i} = \dfrac{X}{N}$.

Cela signifie que la proportion d'hommes dans chacune des classes est toujours la même, égale à la proportion d'hommes dans la population totale, ce qui garantit une égalité entre hommes et femmes.