Exercice 1 (edhec 2021)

Partie I :

1)f est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$.

2)a)$\partial_1 f(x,y) = 3x^2 - 3y$ et $\partial_2 f(x,y) = 3y^2 - 3x$.

b)Les points critiques de f sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \partial_1 f(x,y) = 0 \\ \partial_2 f(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases}$$

Or, $x^4 - x = 0 \iff x(x^3 - 1) = 0 \iff x = 0$ ou $x^3 = 1 \iff x = 0$ ou $x = 1$ par bijectivité de la fonction cube.

On trouve alors y en remplaçant la valeur de x dans la première équation.

Finalement, les points critiques de f sont $(0,0)$ et $(1,1)$.

3)a)$\partial^2_{1,1} f(x,y) = 6x, \quad \partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = -3, \quad \partial^2_{2,2} f(x,y) = 6y$.

b)• La matrice hessienne de f en (0,0) est $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

λ est valeur propre de $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\iff (-\lambda) \times (-\lambda) - (-3) \times (-3) = 0$

$\iff \lambda^2 = 9$

$\iff \lambda = 3$ ou $\lambda = -3$.

Les valeurs propres sont non nulles et de signes contraires. Donc f ne présente pas d'extrémum local en (0,0), c'est un point selle.

• La matrice hessienne de f en (1,1) est $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

λ est valeur propre de $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\iff (6-\lambda) \times (6-\lambda) - (-3) \times (-3) = 0$

$\iff (6-\lambda)^2 = 9$

$\iff 6 - \lambda = 3$ ou $6 - \lambda = -3$.

$\iff \lambda = 3$ ou $\lambda = 9$.

Les valeurs propres sont strictement positives. Donc f possède un minimum local en (1,1) et $f(1,1) = -1$.

4)Supposons que f possède un minimum global en (1,1).
Alors, $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x,y) \geq f(1,1)$, soit $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x,y) \geq -1 \quad (*)$
Or, $f(0,-2) = -8 < -1$, ce qui contredit $(*)$.

Donc f n'a pas de minimum global en (1,1).

Partie II :

$\forall x \in \mathbf{R},\ g(x) = f(x,1) = x^3 - 3x + 1$.

5)Soit $n \geq 4$, un entier.

g est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme fonction polynomiale.
$\forall x \in \mathbf{R},\ g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

D'où le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$\forall x \leq 1,\ g(x) \leq 3 < n$ donc l'équation $g(x) = n$ n'a pas de solution sur $]-\infty, 1]$.

Regardons maintenant sur $[1, +\infty[$.
g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
Elle réalise donc une bijection de $[1, +\infty[$ sur $g\left([1, +\infty[\right) = [-1, +\infty[$.
$n \geq 4$ donc $n \in [-1, +\infty[$ admet un unique antécédent u_n par g.

Ainsi, pour tout entier $n \geq 4$, l'équation $g(x) = n$ possède une unique solution $u_n \in [1, +\infty[$.

6)a)h^{-1} a même variation que h, elle est donc strictement croissante sur $[-1, +\infty[$.

x	-1		$+\infty$
$h^{-1}(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

b)Par construction, on a : $\forall n \geq 4,\ g(u_n) = n$.
Comme $u_n \in [1, +\infty[$, on a $g(u_n) = h(u_n)$ d'où $h(u_n) = n$, puis $u_n = h^{-1}(n)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} h^{-1}(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

c)$\forall n \geq 4,\ g(u_n) = n \iff u_n^3 - 3u_n + 1 = n \iff u_n^3 \left(1 - \dfrac{3}{u_n^2} + \dfrac{1}{u_n^3}\right) = n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{3}{u_n^2} + \dfrac{1}{u_n^3}\right) = 1$.

Cela entraîne que $u_n^3 \underset{+\infty}{\sim} n$, puis $\left(u_n^3\right)^{1/3} \underset{+\infty}{\sim} n^{1/3}$, c'est-à-dire $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^{1/3}$.

Exercice 2 (edhec 2021)

1)a)• $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \geq 0$ car $\forall x > 0,\ \dfrac{2}{x^3} > 0$ et $e^{-1/x^2} > 0$.

• f est continue sur $]-\infty, 0]$ (fonction nulle) et sur $]0, +\infty[$ comme composée et inverse de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
Donc f est continue sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en 0.

• $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est une intégrale doublement impropre en 0 et $+\infty$.

Etudions $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Pour tout $A \in]0, 1]$, on a :
$\displaystyle\int_A^1 f(x)dx = \int_A^1 \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}dx = \left[e^{-1/x^2}\right]_A^1 = e^{-1} - e^{-1/A^2}.$

$\displaystyle\lim_{A\to 0^+} -1/A^2 = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$. Par composition, $\displaystyle\lim_{A\to 0^+} e^{-1/A^2} = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{A\to 0^+}\int_A^1 f(x)dx = e^{-1}$, ce qui prouve que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ converge et vaut e^{-1}.

Pour tout $B \in [1, +\infty]$, on a :
$\displaystyle\int_1^B f(x)dx = \int_1^B \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}dx = \left[e^{-1/x^2}\right]_1^B = e^{-1/B^2} - e^{-1}.$

$\displaystyle\lim_{B\to+\infty} -1/B^2 = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0} e^t = 1$. Par composition, $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} e^{-1/B^2} = 1$.

Donc $\displaystyle\lim_{B\to+\infty}\int_1^B f(x)dx = 1 - e^{-1}$, ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut $1 - e^{-1}$.

D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

De plus, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx = e^{-1} + 1 - e^{-1} = 1.$

Enfin, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ converge et vaut zéro car f est nulle sur $]-\infty, 0]$.

D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge.

De plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx = 0 + 1 = 1.$

On conclut que f est une densité.

b)$\forall x \in \mathbf{R},\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)dt.$

• premier cas : $x \leq 0$

$F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x 0dt$ car f est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc sur $]-\infty, x]$.

Ainsi, $F(x) = 0$.

• deuxième cas : $x > 0$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{2}{t^3} e^{-1/t^2} dt \\
&= 0 + \lim_{A \to 0^+} \int_{A}^{x} \frac{2}{t^3} e^{-1/t^2} dt \\
&= \lim_{A \to 0^+} \left[e^{-1/t^2} \right]_A^x \\
&= \lim_{A \to 0^+} \left[e^{-1/x^2} - e^{-1/A^2} \right] \\
&= e^{-1/x^2}.
\end{aligned}$$

On conclut que $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

2)a)• $\forall x \in \mathbf{R},\ g(x) \geq 0$ car $\forall x \geq 1,\ \dfrac{2}{x^3} > 0$.

• g est continue sur $]-\infty, 1[$ (fonction nulle) et sur $[1, +\infty[$ comme inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas.
Donc f est continue sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en 1.

• Pour tout $A \geq 1$, on a :

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{1}^{A} g(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int_{1}^{A} \frac{2}{x^3} dx = \lim_{A \to +\infty} \left[-\frac{1}{x^2} \right]_1^A = \lim_{A \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{A^2} \right) = 1.$$

Donc $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} g(x)dx$ converge et vaut 1.

Enfin, $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} g(x)dx$ converge et vaut zéro car g est nulle sur $]-\infty, 1[$.

D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ converge.

De plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{1} g(x)dx + \int_{1}^{+\infty} g(x)dx = 0 + 1 = 1.$

On conclut que g est une densité.

b)$\forall x \in \mathbf{R},\ G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)dt.$

• premier cas : $x < 1$

$G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0dt$ car g est nulle sur $]-\infty, 1]$ donc sur $]-\infty, x]$.

Ainsi, $G(x) = 0$.

• deuxième cas : $x \geq 1$

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{1} g(t)dt + \int_{1}^{x} g(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{1} 0dt + \int_{1}^{x} \frac{2}{t^3}dt \\
&= 0 + \left[\frac{-1}{t^2}\right]_1^x \\
&= 1 - \frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

On conclut que $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

3)a)$\forall x \in \mathbf{R},\ G_n(x) = P(M_n \leq x)$

$$\begin{aligned}
&= P\big((X_1 \leq x) \cap ... \cap (X_n \leq x)\big) \\
&= P(X_1 \leq x) \cdots P(X_n \leq x) \quad \text{par indépendance} \\
&= P(X \leq x) \cdots P(X \leq x) \quad \text{car les } X_k \text{ ont même loi que } X \\
&= G(x)^n.
\end{aligned}$$

Ainsi, $G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \\ \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^n & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b)$\forall x \in \mathbf{R},\ F_n(x) = P(Y_n \leq x)$

$$\begin{aligned}
&= P\big(M_n \leq \sqrt{n}x\big) \\
&= G_n\big(\sqrt{n}x\big) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } \sqrt{n}x < 1 \\ \left(1 - \dfrac{1}{\big(\sqrt{n}x\big)^2}\right)^n & \text{si } \sqrt{n}x \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}
\end{aligned}$$

4)Soit $x \leq 0$. On a alors $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ x < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc $F_n(x) = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$.

5)a)Soit $x > 0$ et soit $n > \left\lfloor \dfrac{1}{x^2} \right\rfloor$. Comme n est un entier, on a alors $n > \dfrac{1}{x^2}$.

Puis, $n > \dfrac{1}{x^2} \iff nx^2 > 1 \iff x^2 > \dfrac{1}{n} \iff x > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Donc $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.

b)Le cours donne : $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$.

$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ F_n(x) = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{nx^2}\right)}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{nx^2} = 0$ et $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ donc $\ln\left(1-\frac{1}{nx^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{nx^2}$.

On déduit : $n\ln\left(1-\frac{1}{nx^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}$.

Cela signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{nx^2}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Enfin, par continuité de la fonction exponentielle : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = e^{-1/x^2}$.

6)Les calculs précédents prouvent que :

$\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \end{array}\right. = F(x)$.

Donc $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers Y.

Exercice 3 (edhec 2021)

1)a)M_a est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.
Ainsi, $sp(M_a) = \{1, a\}$.

b)• $E_1(M_a) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (M_a - I)U = 0\}$.

Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(M_a - I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcll} (1-a)x + (a-1)y & = & 0 & L_1 \\ (1-a)y + (a-1)z & = & 0 & L_2 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} x - y = 0 & L_1 \leftarrow 1/(1-a)L_1 \\ y - z = 0 & L_2 \leftarrow 1/(1-a)\text{Ł}_2 \end{array} \right.$$

$$\iff x = y = z.$$

Donc $E_1(M_a) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

• $E_a(M_a) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (M_a - aI)U = 0\}$.

Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(M_a - aI)U = 0 \iff \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcll} (1-a)x & = & 0 & L_1 \\ (1-a)y & = & 0 & L_2 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} x = 0 & L_1 \leftarrow 1/(1-a)L_1 \\ y = 0 & L_2 \leftarrow 1/(1-a)\text{Ł}_2 \end{array} \right.$$

Donc $E_a(M_a) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

c)$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ sont des bases respectives de $E_1(M_a)$ et $E_a(M_a)$ car ce sont des vecteurs générateurs et libres (car non nuls).
Donc $E_1(M_a)$ et $E_a(M_a)$ sont de dimension 1.

Enfin, $dim E_1(M_a) + dim E_a(M_a) = 2 < 3 =$ taille de M_a.

Donc M_a n'est pas diagonalisable grâce au théorème de réduction.

2)a)Après calcul, on trouve : $M_a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & a^2 & 0 \\ (1-a)^2 & 2a(1-a) & a^2 \end{pmatrix}$.

Etudions la liberté de la famille (I, M_a, M_a^2).

Pour tous réels x, y et z, on a :

$xI + yM_a + zM_a^2 = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} x+y+z & 0 & 0 \\ (1-a)y+(1-a^2)z & x+ay+a^2z & 0 \\ (1-a)^2z & (1-a)y+2a(1-a)z & x+ay+a^2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z & = & 0 \\ x+ay+a^2z & = & 0 \\ (1-a)y+(1-a^2)z & = & 0 \\ (1-a)y+2a(1-a)z & = & 0 \\ (1-a)^2z & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y & = & 0 \\ x+ay & = & 0 \\ (1-a)y & = & 0 \\ z & = & 0 \quad \text{car } a \neq 1 \end{cases}$$

La troisième équation donne alors $y = 0$ car $a \neq 1$, puis en substituant dans la première équation : $x = 0$.

Donc (I, M_a, M_a^2) est une famille libre.

Comme $E = \text{Vect}\,(I, M_a, M_a^2)$, la famille (I, M_a, M_a^2) est génératrice de E.

On conclut que (I, M_a, M_a^2) est une base de E. Donc $dimE = 3$.

b)On obtient $K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $JK^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$M_a - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} = (1-a)J.$$

$$M_a - aI = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \end{pmatrix} = (1-a)K.$$

Donc $(M_a - I)(M_a - aI)^2 = (1-a)J\left((1-a)K\right)^2 = (1-a)^3JK^2 = 0$.

c)En développant le membre de gauche, on obtient :

$$\begin{aligned}(M_a - I)(M_a - aI)^2 &= (M_a - I)(M_a^2 - 2aM_a + a^2I) \\ &= M_a^3 - 2aM_a^2 + a^2M_a - M_a^2 + 2aM_a - a^2I \\ &= M_a^3 - (2a+1)M_a^2 + (a^2+2a)M_a - a^2I.\end{aligned}$$

Cette expression est nulle d'après 2)b) donc $M_a^3 = (2a+1)M_a^2 - (a^2+2a)M_a + a^2I$.

M_a^3 est combinaison linéaire de I, M_a et M_a^2. Donc $M_a^3 \in E$.

3)a)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « il existe un triplet (u_n, v_n, w_n) de réels tels que $M_a^n = u_nM_a^2 + v_nM_a + w_nI$ ».

$M_a^0 = I = 0M_a^2 + 0M_a + 1I$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$
\begin{aligned}
M_a^{n+1} &= M_a^n M_a \\
&= \left(u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I\right) M_a \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= u_n M_a^3 + v_n M_a^2 + w_n M_a \\
&= u_n \left((2a+1)M_a^2 - (a^2+2a)M_a + a^2 I\right) + v_n M_a^2 + w_n M_a \quad \text{d'après 2)c)} \\
&= \left((2a+1)u_n + v_n\right) M_a^2 + \left(-a(a+2)u_n + w_n\right) M_a + a^2 u_n I.
\end{aligned}
$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un triplet (u_n, v_n, w_n) de réels tels que $M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I$.

L'unicité est acquise par le fait que la famille (I, M_a, M_a^2) est libre.

L'initialisation donne : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 1 \end{cases}$

L'hérédité donne : $\begin{cases} u_{n+1} = (2a+1)u_n + v_n \\ v_{n+1} = -a(a+2)u_n + w_n \\ w_{n+1} = a^2 u_n \end{cases}$

b)Programme :

```
(1) n=int(input("Entrez une valeur pour n "))
(2) a=int(input("Entrez une valeur pour a "))
(3) u=0
(4) v=0
(5) w=1
(6) for k in range(1,n+1):
(7)    u=(2*a+1)*u+v
(8)    v=-a*(a+2)*u+w
(9)    w=a*a*u
(10) print(u,v,w)
```

Les lignes (3),(4) et (5) initialisent la suite avec $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ et $w_0 = 1$.
De la ligne (6) à la ligne (9), on effectue une boucle n fois, puisque $k \in [\![1, n]\!]$.
A la ligne (7), on calcule u_k en faisant $u_k = (2a+1)u_{k-1} + v_{k-1}$, tout va bien.
A la ligne (8), on calcule v_k en espérant faire $v_k = -a(a+2)u_{k-1} + w_{k-1}$.
Hélàs, la variable u prend la valeur u_k et non u_{k-1} car elle a été modifiée précédemment, en ligne (7).
Autrement dit, la ligne (8) donne : $v_k = -a(a+2)u_k + w_{k-1}$, ce qui ne va pas.
Même problème avec la ligne (9).

c)On modifie la boucle en créant une nouvelle variable u_old qui garde en mémoire la valeur de u_{k-1}.

```
for k in range(1,n+1):
    u_old=u
    u=(2*a+1)*u_old+v
    v=-a*(a+2)*u_old+w
    w=a*a*u_old
print(u,v,w)
```

On peut aussi plus simplement utiliser des *affectations parallèles* :

```
for k in range(1,n+1):
    (u,v,w)=((2*a+1)*u+v,-a*(a+2)*u+w,a*a*u)
print(u,v,w)
```

4)Grâce aux égalités trouvées dans la question 3)a), on obtient pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= (2a+1)u_{n+2} + v_{n+2} \\ &= (2a+1)u_{n+2} + \big(-a(a+2)u_{n+1} + w_{n+1}\big) \\ &= (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + a^2 u_n. \end{aligned}$$

5)On admet que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \dfrac{(n-1)a^n - na^{n-1} + 1}{(a-1)^2}$.

a)• $\forall n \in \mathbf{N},\ (n-1)a^n - na^{n-1} + 1 = na^n - a^n - na^{n-1} + 1 = na^{n-1}(a-1) - a^n + 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} na^{n-1} = 0$ car la série $\sum\limits_{n\geq 0} na^{n-1}$ converge, en tant que série dérivée première de paramètre $a \in]0,1[$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ car $a \in]0,1[$.

Par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \big((n-1)a^n - na^{n-1} + 1\big) = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{(a-1)^2}$.

• En passant à la limite dans l'égalité $w_{n+1} = a^2 u_n$, on obtient :

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_{n+1} = \dfrac{a^2}{(a-1)^2}$, ce qui revient à $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{a^2}{(a-1)^2}$.

• En passant à la limite dans l'égalité $v_{n+1} = -a(a+2)u_n + w_n$, on obtient :

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = -a(a+2) \times \dfrac{1}{(a-1)^2} + \dfrac{a^2}{(a-1)^2} = \dfrac{-2a}{(a-1)^2}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{-2a}{(a-1)^2}$.

b)L'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty} M_a^n = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) M_a^2 + \left(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\right) M_a + \left(\lim\limits_{n\to+\infty} w_n\right) I$ donne :

$$L_a = \frac{1}{(a-1)^2} M_a^2 - \frac{2a}{(a-1)^2} M_a + \frac{a^2}{(a-1)^2} I.$$

c)On remarque que

$$\begin{aligned} L_a &= \frac{1}{(a-1)^2}\left(M_a^2 - 2aM_a + a^2 I\right) \\ &= \frac{1}{(a-1)^2}\left(M_a - aI\right)^2 \\ &= \frac{1}{(a-1)^2}\big((1-a)K\big)^2 \quad \text{d'après 2)b)} \\ &= K^2. \end{aligned}$$

Donc $L_a^2 = K^4 = K^2 = L_a$.

6)On va faire cette question matriciellement en notant X le vecteur colonne de x dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
Le vecteur colonne de $\varphi_a(x)$ est alors $L_a X$.

a)$L_aX = K^2X$

$$= \frac{1}{(1-a)^2}\left(M_a - aI\right)^2 X \quad \text{car } M_a - aI = (1-a)K$$

$$= \frac{1}{(1-a)^2}\left(M_a^2 - 2aM_a + a^2I\right)X$$

$$= \frac{1}{(1-a)^2}\left(M_a^2X - 2aM_aX + a^2X\right) \quad (*)$$

Par hypothèse, $x \in Ker(f_a - \mathrm{Id})$. Cela signifie que $f_a(x) = x$, ce qui se traduit par : $M_aX = X$, puis par $M_a^2X = M_aM_aX = M_aX = X$.

En reportant dans $(*)$, on obtient :

$$L_aX = \frac{1}{(1-a)^2}\left(X - 2aX + a^2X\right) = \frac{1}{(1-a)^2}(a-1)^2X = X.$$

Donc $\forall x \in Ker(f_a - \mathrm{Id}),\ \varphi_a(x) = x$.

b)Soit $x \in Im(f_a - \mathrm{Id})$. Alors, il existe $u \in \mathbf{R}^3$ tel que $x = (f_a - \mathrm{Id})(u)$.
Notons U le vecteur colonne de u dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

$$\begin{aligned} L_aX &= L_a(M_a - I)U \\ &= K^2(1-a)JU \quad \text{grâce à et 5)b) et 2)b)} \\ &= (1-a)K^2JU \\ &= 0 \quad \text{car un calcul immédiat donne : } K^2J = 0. \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in Im(f_a - \mathrm{Id}),\ \varphi_a(x) = 0$.

Problème (edhec 2021)

Partie I :

Remarque :
Je trouve que l'énoncé n'est pas très clair.
Est-ce que la manche s'arrête dès lors que l'un des joueurs fait pile ? ou bien dès lors que le moins rapide des deux joueurs fait pile ?
J'opte pour la deuxième option...

1)a)$\bullet$ Cherchons la loi de X_1.
L'expérience aléatoire est constituée d'un certain nombre d'épreuves successives, identiques et indépendantes.
Pour chaque épreuve, la probabilité de succès (faire pile) vaut p.
X_1 est le rang d'obtention du premier succès.
Donc $X_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. De même, $Y_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.
Ainsi, $X_1(\Omega) = Y_1(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(X_1 = k) = P(Y_1 = k) = q^{k-1}p$.

$\bullet$ La manche dure éternellement si et seulement si A ne fait jamais pile **ou** B ne fait jamais pile.
Notons $A_0 =$≪ A ne fait jamais pile ≫ et $B_0 =$≪ B ne fait jamais pile ≫.
On a alors : $P(\text{manche eternelle}) = P\big(A_0 \cup B_0\big)$.

$$\begin{aligned}
\text{Or, } P(A_0) &= 1 - P(A \text{ fait pile}) \\
&= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}(X = k)\right) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p \\
&= 1 - p\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} \\
&= 1 - p\sum_{j=0}^{+\infty} q^{j} \quad \text{en posant } j = k-1 \\
&= 1 - p \times \frac{1}{1-q} \\
&= 0 \quad \text{car } 1 - q = p
\end{aligned}$$

De même, $P(B_0) = 0$.
Enfin, la formule du crible donne :
$0 \leq P(A_0 \cup B_0) = P(A_0) + P(B_0) - P(A_0 \cap B_0) \leq P(A_0) + P(B_0) = 0$.
D'où $P(A_0 \cup B_0) = 0$.
Ainsi, la probabilité que la manche dure éternellement est nulle.

✓ On vient de prouver que la réunion de deux événements quasi-impossibles est un événement quasi-impossible.

b)E_1 est réalisé si et seulement si X_1 et Y_1 prennent la même valeur.
Donc $E_1 = (X_1 = Y_1)$.

c)La formule des probabilités totales pour le sce $(Y_1 = i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
P(E_1) &= P(X_1 = Y_1)\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} P\big((X_1 = Y_1) \cap (Y_1 = i)\big)\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} P\big((X_1 = i) \cap (Y_1 = i)\big)\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i)P(Y_1 = i) \quad \text{par indépendance des joueurs}\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1}pq^{i-1}p\\
&= p^2\sum_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2}\\
&= p^2\sum_{i=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{i-1}\\
&= p^2\sum_{k=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k}\\
&= p^2 \times \frac{1}{1-q^2}\\
&= p^2 \times \frac{1}{(1-q)(1+q)}\\
&= \frac{p}{1+q}.
\end{aligned}$$

d)Les lancers de pièce des joueurs A et B sont réalisés dans les mêmes conditions (pièces identiques).
Intuitivement, ils ont donc la même probabilité de gagner la première manche.
Ainsi, $P(G_1) = P(H_1)$.

La famille d'événements (E_1, G_1, H_1) est un système complet car ils sont deux à deux incompatibles et leur réunion fait Ω.
Donc $P(E_1) + P(G_1) + P(H_1) = 1$.

Comme $P(H_1) = P(G_1)$, on déduit :

$$P(G_1) = \frac{1}{2}\big(1 - P(E_1)\big) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{1+q}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1+q-p}{1+q} = \frac{q}{1+q}.$$

2)a)G_n est réalisé si et seulement si A gagne la n-ième manche, ce qui se produit si et seulement si il y a égalité lors des $n-1$ premières manches et si à la n-ième manche, A fait pile avant B.
Ainsi, $G_n = E_1 \cap ... \cap E_{n-1} \cap \big(X_n < Y_n\big)$.

b)Soit $k \geq 2$ un entier. Supposons que l'événement $E_1 \cap ... \cap E_{k-1}$ est réalisé.

La probabilité pour que E_k se réalise est égale à $P(E_1)$, puisque la k-ième manche se fait dans les mêmes conditions que la première.

Ainsi, $P_{E_1\cap\ldots\cap E_{k-1}}(E_k) = \dfrac{p}{1+q}$. On déduit :

$$\begin{aligned}
P(G_n) &= P\big(E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap \big(X_n < Y_n\big)\big)\\
&= \left(\prod_{k=1}^{n-1} P_{E_1\cap\ldots\cap E_{k-1}}(E_k)\right) P_{E_1\cap\ldots\cap E_{n-1}}(X_n < Y_n) \quad \text{probabilités composées}\\
&= \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{p}{1+q}\right) \frac{q}{1+q}\\
&= \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}.
\end{aligned}$$

✓ $P_{E_1\cap\ldots\cap E_{n-1}}(X_n < Y_n) = \dfrac{q}{1+q}$ car la n-ième manche se fait dans les mêmes conditions que la première.

c)Pour $n=1$, la formule précédente donne : $P(G_1) = \dfrac{q}{1+q}$ et on retrouve 1)d).

d)G est réalisé si et seulement si l'un des G_n est réalisé. Donc $G = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$.

On déduit :

$$\begin{aligned}
P(G) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n\right)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P(G_n)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}\\
&= \frac{q}{1+q}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1}\\
&= \frac{q}{1+q}\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{j}\\
&= \frac{q}{1+q} \times \frac{1}{1-\frac{p}{1+q}}\\
&= \frac{q}{1+q} \times \frac{1+q}{1+q-p}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

e)En faisant exactement la même démarche, on a $P(H) = 1/2$.

La famille d'événements (E, G, H) est un système complet.

On a donc $P(E)+P(G)+P(H) = 1$, soit $P(E) = 1-P(G)-P(H) = 1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2} = 0$.

Partie II :

3)a)La formule des probabilités totales pour le système complet $(X_1 = i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ donne :

$$\begin{aligned}
P(Y_1 = X_1+1) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P\big((X_1=i)\cap(Y_1=X_1+1)\big)\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} P\big((X_1=i)\cap(Y_1=i+1)\big)\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1=i)P(Y_1=i+1) \quad \text{par indépendance des joueurs}\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1}pq^ip\\
&= p^2q\sum_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2}\\
&= p^2q\sum_{i=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{i-1}\\
&= p^2q\sum_{k=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k}\\
&= p^2q\times\frac{1}{1-q^2}\\
&= p^2q\times\frac{1}{(1-q)(1+q)}\\
&= \frac{pq}{1+q}.
\end{aligned}$$

b)$$\begin{aligned}
u &= P(Y_1 = X_1+1)+P(X_1=Y_1+1)\\
&= 2P(Y_1=X_1+1) \quad \text{par symétrie}\\
&= \frac{2pq}{1+q}.
\end{aligned}$$

4)a)$K_n = E_1\cap ...\cap E_{n-1}\cap\big((Y_n = X_n+1)\cup(X_n=Y_n+1)\big)$.

b)Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
P(K_n) &= P\left(E_1\cap ...\cap E_{n-1}\cap\big((Y_n = X_n+1)\cup(X_n=Y_n+1)\big)\right)\\
&= \left(\prod_{k=1}^{n-1} P_{E_1\cap...\cap E_{k-1}}(E_k)\right)P_{E_1\cap...\cap E_{n-1}}\big((Y_n = X_n+1)\cup(X_n=Y_n+1)\big)\\
&= \left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{p}{1+q}\right)\frac{2pq}{1+q}\\
&= \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1}\frac{2pq}{1+q}.
\end{aligned}$$

5)K est réalisé si et seulement si l'un des K_n est réalisé. Donc $K = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$.

On déduit :

$$\begin{aligned}
P(K) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P(K_n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{2pq}{1+q} \\
&= \frac{2pq}{1+q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \\
&= \frac{2pq}{1+q} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{j} \\
&= \frac{2pq}{1+q} \times \frac{1}{1-\frac{p}{1+q}} \\
&= \frac{2pq}{1+q} \times \frac{1+q}{1+q-p} \\
&= p.
\end{aligned}$$

Partie III :

6)Programme :

```
import numpy.random as rd
p=float(input("Entrez une valeur pour p:"))
c=1
X=rd.geometric(p)
Y=rd.geometric(p)
while X==Y:
    X=rd.geometric(p)
    Y=rd.geometric(p)
    c=c+1
if X<Y:
    print("A gagne")
else:
    print("B gagne")
print(c)
```

7)Programme :

```
if X-Y==1 or Y-X==1:
    print("A gagne le deuxième jeu")
else:
    print("B gagne le deuxième jeu")
```