Chapitre 12 : introduction aux probabilités

I)Dénombrement

Déf : pour tout entier $n \geq 1$, on définit la factorielle de n, notée $n!$ par :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

On convient que $0! = 1$

Propriété 1
Soit E un ensemble de cardinal n. Le nombre de bijections de E dans E vaut $n!$

Déf : soient $n \geq 1$ un entier et E un ensemble à n éléments.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on appelle combinaison de k éléments de E tout ensemble $\{x_1, ..., x_k\}$ où $x_1, ..., x_k$ sont des éléments deux à deux distincts de E.
Une combinaison de k éléments de E est donc une partie à k éléments de E.

Propriété 2
Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de combinaisons de k éléments de E vaut $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

Propriété 3
$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

<u>Exercice 1</u>
Avec un jeu de 32 cartes, combien peut-on former de mains de 4 cartes ?

<u>Exercice 2</u>
Combien y a t-il de surjections d'un ensemble E de 5 éléments dans un ensemble F de 4 éléments ?

Théorème 1 (formule du triangle de Pascal)
$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ où $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq n-1$.

Théorème 2 (formule du binôme)
Pour a et b réels, $n \in \mathbf{N}$: $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

II)Univers et événements

Déf : l'univers Ω d'une expérience aléatoire est l'ensemble des résultats ω (ou éventualités) de l'expérience.

Déf : un événement est une partie de Ω, c'est donc un ensemble d'éventualités.

Déf : pour tout $\omega \in \Omega$, l'événement $\{\omega\}$ est appelé événement élémentaire.

Déf : l'ensemble de tous les événements s'appelle la tribu et se note $\mathscr{A}$.
Si Ω est fini, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. Si Ω est infini, on peut avoir $\mathscr{A} \neq \mathscr{P}(\Omega)$.

Déf : on dit que deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

Déf : pour tout événement A, on note $\overline{A} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$ l'événement contraire.

Propriété 4
Pour tous événements A, B, C de Ω, on a :
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (formules de Morgan).
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité).
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité).

III)Probabilité sur un univers fini

On suppose dans ce paragraphe que l'univers Ω est fini.

Déf : on appelle probabilité sur Ω toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ vérifiant :
$P(\Omega) = 1$,
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour tous événements incompatibles A et B

Propriété 5
Pour tout $n \geq 2$ et toute famille $(A_1, ..., A_n)$ d'événements incompatibles deux à deux, on a : $P(A_1 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + ... + P(A_n)$ (additivité).

Propriété 6
Soient A et B des événements.
$P(\emptyset) = 0$,
$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$,
$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$.

Propriété 7 (formule du crible à deux ou trois parties)
Soient A, B et C des événements.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Déf : on dit qu'on est en situation d'équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Théorème 3 (formule d'équiprobabilité)
En situation d'équiprobabilité, on a pour tout événement A :

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}.$$

<u>Exercice 3</u>
Dans une urne contenant 5 jetons blancs et 10 jetons noirs, on tire deux jetons.
Calculer la probabilité de l'événement $A =$ ≪ les deux jetons sont blancs ≫ dans chacun des cas suivants :
1)Le tirage est simultané.
2)Le tirage est successif sans remise.
3)Le tirage est successif avec remise.

<u>Exercice 4</u>
On répartit de façon aléatoire r boules ($r \geq 1$) dans 3 boîtes, numérotées 1,2,3.
Quelle est la probabilité qu'à l'issue, aucune des boîtes ne soit vide ?
On pourra introduire les événements $A_i =$ ≪ la boîte i n'est pas vide ≫ (i=1,2,3) et appliquer la formule du crible.

IV)Réunion et intersection dénombrables d'événements

On suppose dans ce paragraphe que l'univers Ω est fini ou infini.

Déf : pour toute famille $(A_n)_{n\geq 0}$ d'événements, on définit les événements :

$\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n = \{\omega \in \Omega,\ \exists n \geq 0,\ \omega \in A_n\}$ (réunion dénombrable),

$\bigcap\limits_{n\geq 0} A_n = \{\omega \in \Omega,\ \forall n \geq 0,\ \omega \in A_n\}$ (intersection dénombrable).

Propriété 8

$\overline{\bigcap\limits_{n\geq 0} A_n} = \bigcup\limits_{n\geq 0} \overline{A_n}$ et $\overline{\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n} = \bigcap\limits_{n\geq 0} \overline{A_n}$ (formules de Morgan)

$B \cap \left(\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n\right) = \bigcup\limits_{n\geq 0} (B \cap A_n)$ (distributivité)

$B \cup \left(\bigcap\limits_{n\geq 0} A_n\right) = \bigcap\limits_{n\geq 0} (B \cup A_n)$ (distributivité)

V)Probabilité sur un univers quelconque (fini ou infini)

Déf : soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.
On appelle probabilité sur Ω toute application $P : \mathscr{A} \longrightarrow [0,1]$ vérifiant :
$P(\Omega) = 1$ et pour toute famille $(A_n)_{n\geq 0}$ d'événements deux à deux incompatibles,

$P\left(\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ (sigma-additivité).

Déf : le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Déf : quand Ω est **infini**, on peut rencontrer des catégories particulières d'événements :

− des événements $A \neq \Omega$, appelés ≪ quasi-certains ≫ tels que $P(A) = 1$,

− des événements $A \neq \emptyset$, appelés ≪ quasi-impossibles ≫ tels que $P(A) = 0$.

Exercice 5
On lance une infinité de fois une pièce dont la probabilité de faire pile est p avec $0 < p < 1$ et on note $q = 1 - p$.
Montrer que l'événement $A =$ ≪ on obtient au moins un pile ≫ est quasi-certain.
indication : introduire $A_n =$ ≪ le premier pile est obtenu au n-ième lancer ≫.

Déf : on dit que $(B_1, ..., B_n)$ est un système complet d'événements de Ω si B_1,..., B_n sont incompatibles deux à deux et si $B_1 \cup ... \cup B_n = \Omega$.

Propriété 9
Si $(B_1, ..., B_n)$ est un système complet d'événements de Ω, alors : $\sum\limits_{k=1}^{n} P(B_k) = 1$.

Déf (généralisation) : on dit que $(B_n)_{n\geq 1}$ est un système complet de Ω si les événements $(B_n)_{n\geq 1}$ sont incompatibles deux à deux et si $\bigcup\limits_{n\geq 1} B_n = \Omega$.

Propriété 10
Si $(B_n)_{n\geq 1}$ est un système complet d'événements de Ω, alors : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(B_n) = 1$.

VI)Probabilité conditionnelle sur un univers quelconque

Déf : pour tout événement A tel que $P(A) \neq 0$ et tout événement B, on définit le nombre réel, noté $P_A(B)$ et appelé probabilité conditionnelle de B sachant A par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Propriété 11
1)L'application $P_A : \mathscr{A} \longrightarrow [0,1]$ est une probabilité sur Ω.
2)Toutes les propriétés vues dans les paragraphes précédents restent valables en remplaçant P par P_A. En voici quelques unes :
$P_A(\Omega) = 1$ et $P_A(\emptyset) = 0$,
$P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - P_A(B)$,
$P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$.

VII)Indépendance

Déf : on dit que les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Propriété 12
Pour tous événements A et B tels que $P(A) \neq 0$, on a :
A et B indépendants $\Longleftrightarrow P_A(B) = P(B)$.

Propriété 13
Quels que soient les événements A et B, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
A \text{ et } B \text{ indépendants} & \Longleftrightarrow & \overline{A} \text{ et } B \text{ indépendants} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
A \text{ et } \overline{B} \text{ indépendants} & \Longleftrightarrow & \overline{A} \text{ et } \overline{B} \text{ indépendants.}
\end{array}$$

Déf : on dit que les événements A_1,..., A_n sont mutuellement indépendants pour la probabilité P si pour toute famille d'indices $J \subset \{1, ..., n\}$, on a :
$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$.

Propriété 14
Si des événements A_1,..., A_n sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants.

Propriété 15
Si des événements A_1,..., A_n sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_1,..., B_n avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

Déf (généralisation) : soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
On dit que les événements $(A_n)_{n \geq 0}$ sont mutuellement indépendants si en prenant un nombre fini d'entre eux, on obtient à chaque fois des événements mutuellement indépendants.

<u>Exercice 6</u>
On lance deux fois un dé équilibré et on considère les événements suivants :
A = « la somme des deux lancers donne 6 »,
B = « la somme des deux lancers donne 7 »,
C = « le premier lancer donne 4 ».
Étudier l'indépendance de A et C puis celle de B et C.

VIII)Les 3 formules essentielles

Théorème 4 (formule des probabilités composées)
Pour tous événements A_1,..., A_n tels que $P(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \neq 0$, on a :
$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3)...P_{A_1 \cap ... \cap A_{n-1}}(A_n)$.

Exercice 7
Une urne U_1 contient 2 rouges, 3 blanches et 5 vertes.
Une urne U_2 contient 4 rouges et 5 blanches.
Une urne U_3 contient 3 blanches et 6 vertes.
On considère l'expérience aléatoire suivante :
− on tire une boule dans U_1 qu'on place dans U_2,
− puis, on tire une boule dans U_2 qu'on place dans U_3,
− enfin, on tire une boule dans U_3.

1)Quelle est la probabilité que les 3 boules tirées soient vertes ?
2)Quelle est la probabilité qu'aucune des boules ne soit blanche ?

Théorème 5 (formule des probabilités totales)
Soit $(B_1, ..., B_n)$ un système complet de Ω. Pour tout événement A, on a :

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} P_{B_k}(A)P(B_k).$$

Exercice 8
On étudie le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes.
– si l'appareil fonctionne à l'instant n ($n \geq 0$), la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant $n + 1$ est de $1/6$,
– si l'appareil est en panne à l'instant n ($n \geq 0$), la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant $n + 1$ est de $2/3$.
On note p_n la probabilité que l'appareil fonctionne à l'instant n.
Établir une relation entre p_{n+1} et p_n.

Théorème 6(généralisation de la formule des probabilités totales)
Soit $(B_n)_{n \geq 1}$ un système complet de Ω. Pour tout événement A, on a :

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A \cap B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_{B_n}(A)P(B_n).$$

Exercice 9
Dans une population, on estime que la probabilité qu'une famille choisie au hasard ait n enfants est $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ où $\lambda > 0$ est une constante réelle et $n \in \mathbf{N}$.
En supposant les sexes équiprobables à la naissance, calculer la probabilité qu'une famille choisie au hasard n'ait que des garçons.

Théorème 7 (formule de Bayes)
Pour tous événements A et B tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, on a :

$$P_A(B) = \frac{P_B(A)P(B)}{P(A)}.$$

Exercice 10
Un contrôle anti-dopage montre que 2% des sportifs sont déclarés positifs.
Chez certains, la prise d'un médicament M peut causer un contrôle positif.
25% des sportifs prennent M.
5% des sportifs qui prennent M ont un contrôle positif.
On choisit un sportif au hasard.
1)Le test est positif. Quelle est la probabilité que ce sportif ait pris M ?
2)Le sportif n'a pas pris M. Quelle est la probabilité que le test soit positif ?

IX)Théorème de la limite monotone

Déf : on dit qu'une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'événements est :

– croissante (pour l'inclusion) si $\forall n \geq 1,\ A_n \subset A_{n+1}$,

– décroissante (pour l'inclusion) si $\forall n \geq 1,\ A_{n+1} \subset A_n$.

Théorème 8 (théorème de la limite monotone)

– pour toute suite croissante $(A_n)_{n\geq 1}$, on a : $P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

– pour toute suite décroissante $(A_n)_{n\geq 1}$, on a : $P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Exercice 11
On lance une infinité de fois une pièce dont la probabilité de faire pile est p avec $0 < p < 1$ et on note $q = 1 - p$.
Montrer que $A =$ « on obtient au moins un pile » est quasi-certain.
indication : introduire la famille d'événements $(A_n)_{n\geq 1}$ définis par
$A_n =$ « on obtient au moins un pile aux n premiers lancers ».

Théorème 9 (corollaire du théorème de la limite monotone)
Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'événements, on a :

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right).$$

$$P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right).$$

Exercice 12
On lance une infinité de fois une pièce dont la probabilité de faire pile est p avec $0 < p < 1$ et on note $q = 1 - p$.
Montrer que $A =$ « on obtient au moins un pile » est quasi-certain.
indication : introduire la famille d'événements $(A_n)_{n\geq 1}$ définis par
$A_n =$ « le n-ième lancer amène face » ,