Corrrection DM5 cubes

Exercice 1 :

1)$\displaystyle\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{\prod_{k=0}^{r-1}(n-k)}{r!}$.

Pour tout $k \in [\![0, r-1]\!]$, $n-k \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Par produit d'équivalents : $\displaystyle\prod_{k=0}^{r-1}(n-k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \prod_{k=0}^{r-1} n = n^r$.

Donc $\displaystyle\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$.

2)• Par croissances comparées, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^\alpha q^n = 0$ quand $\alpha > 0$ et $q \in]-1, 1[$.

On l'applique pour $\alpha = r+2$ et $q = x$, ce qui donne : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{r+2}x^n = 0$.

• De la question 1), on tire : $\displaystyle\binom{n}{r}x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{r!}n^r x^n \quad (*)$

De plus, on a vu que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{r+2}x^n = 0$. Cela entraîne que $\displaystyle n^r x^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geq r}\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann de paramètre $2 > 1$).

D'après le critère de négligeabilité sur les séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geq r} n^r x^n$ converge.

La série $\displaystyle\sum_{n\geq r}\frac{1}{r!}n^r x^n$ qui est de même nature converge aussi.

Enfin, grâce à $(*)$ et d'après le critère d'équivalence sur les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geq r}\binom{n}{r}x^n$ converge.

3)a)$\displaystyle S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{0}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$ (somme de la série géométrique).

3)b)
$$\begin{aligned}
S_r + S_{r+1} &= \sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}x^n + \sum_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^n \\
&= x^r + \sum_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r}x^n + \sum_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^n \\
&= x^r + \sum_{n=r+1}^{+\infty}\left(\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}\right)x^n \\
&= x^r + \sum_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n+1}{r+1}x^n \text{ triangle de Pascal}
\end{aligned}$$

En posant $j = n+1$ dans la somme, on obtient :

$$
\begin{aligned}
S_r + S_{r+1} &= x^r + \sum_{j=r+2}^{+\infty} \binom{j}{r+1} x^{j-1} \\
&= x^r + \frac{1}{x} \sum_{j=r+2}^{+\infty} \binom{j}{r+1} x^{j} \\
&= x^r + \frac{1}{x} \left(\sum_{j=r+1}^{+\infty} \binom{j}{r+1} x^{j} - \binom{r+1}{r+1} x^{r+1} \right) \\
&= x^r + \frac{1}{x} \left(S_{r+1} - x^{r+1} \right) \\
&= \frac{1}{x} S_{r+1}.
\end{aligned}
$$

3)c)Soit $\mathscr{P}(r)$ la proposition :« $S_r = \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$. »

$\mathscr{P}(0)$ est vraie grâce à la question 3)a).
Soit $r \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(r)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(r+1)$ est vraie.
L'égalité 3)b) donne : $S_{r+1} = \dfrac{x}{1-x} S_r$, d'où par hypothèse de récurrence :

$S_{r+1} = \dfrac{x}{1-x} \times \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}} = \dfrac{x^{r+1}}{(1-x)^{r+2}}$. Donc $\mathscr{P}(r+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall r \in \mathbf{N}, S_r = \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

Exercice 2

Partie I :

1)$A^2-(a+d)A=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix}$.

Donc[1] $A^2-(a+d)A=(bc-ad)I$

2)On suppose qu'il existe un entier $k\geq 2$ tel que $A^{k-1}\neq 0$ et $A^k=0 \quad (*)$
Supposons que A est inversible. On a alors en multipliant $(*)$ par A^{-1} :
$A^kA^{-1}=0A^{-1}$, c'est-à-dire $A^{k-1}=0$, ce qui contredit la première hypothèse.
Donc A n'est pas inversible.
Son détermininant est nul. Donc $ad-bc=0$.
La question 1) donne alors : $A^2=(a+d)A$.
Une récurrence facile mène à $\forall n\in\mathbf{N}, A^n=(a+d)^{n-1}A$.
En prenant pour n l'indice de nilpotence k, on a : $A^k=(a+d)^{k-1}A$.
Comme $A^k=0$ et que $A\neq 0$, cela entraîne que $a+d=0$.

3)Si $A^2=0$, alors A est nilpotente.
Réciproquement, si A est nilpotente (d'ordre $k\geq 2$), on a d'après les questions précédentes :
$ad-bc=0$ et $a+d=0$, ce qui entraîne $A^2=0$ grâce à la question 1).

Donc A est nilpotente $\Longleftrightarrow A^2=0$.

Partie II :

1)Montrons la double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $f^2=0$.
Soit $y\in Imf$. Il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$.
On a alors : $f(y)=f\big(f(x)\big)=(f\circ f)(x)=f^2(x)=0$. Donc $y\in Kerf$.
Ainsi, $Imf\subset Kerf$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $Imf\subset Kerf$.
Soit x un vecteur quelconque de E.
$f(x)\in Imf$ donc $f(x)\in Kerf$ du fait de l'hypothèse.
Cela entraîne que $f\big(f(x)\big)=0$, c'est-à-dire $(f\circ f)(x)=0$ ou encore $f^2(x)=0$.
Donc $f^2=0$.

2)Montrons la double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $f^2=0$.
D'après la question 1), on a alors : $Imf\subset Kerf$ donc $dimImf\leq dimKerf \quad (*)$
Le théorème du rang donne $dimKerf=dimE-dimImf$, c'est-à-dire :

$$dimKerf=2-dimImf \qquad (**)$$

1. $A^2-tr(A)A+det(A)I=0$ est une égalité remarquable valable pour toute $A\in\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$

De $(*)$ et $(**)$, on tire : $dimImf \leq 2 - dimImf$, soit $dimImf \leq 1$.

$dimImf = 0$ signifierait que $Imf = \{0\}$, c'est-à-dire $f = 0$, ce qui est contraire à l'énoncé. Donc $dimImf = 1$.

Comme $dimImf = 1$, $(**)$ donne $dimKerf = 1$.

$Imf \subset Kerf$ et $dimImf = dimKerf$ donc $Imf = Kerf$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $Imf = Kerf$.

Alors, on a : $Imf \subset Kerf$, puis $f^2 = 0$ grâce à la question 1)

✓ Si $dimE > 2$, l'équivalence ci-dessus n'est plus vraie.

3)Montrons la double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f nilpotent (d'ordre $k \geq 2$).

Soit $\mathscr{C}$ est une base de E.
Alors, $f^k = 0$ donc $\mathscr{M}_{\mathscr{C}}(f^k) = 0$ ou encore $(\mathscr{M}_{\mathscr{C}}(f))^k = 0$.
$\mathscr{M}_{\mathscr{C}}(f)$ est donc nilpotente. Elle est dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ puisque $dimE = 2$.
D'après la partie I, on a alors $(\mathscr{M}_{\mathscr{C}}(f))^2 = 0$ ou encore $\mathscr{M}_{\mathscr{C}}(f^2) = 0$, ce qui entraîne $f^2 = 0$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $f^2 = 0$, on a immédiatement f nilpotent.

4)Soit f un endomorphisme nilpotent de E.

Dans la question 2), on a prouvé que $dimKerf = 1$.
Soit (e_1) une base de $Kerf$.
$Kerf \subset E$ et $Kerf \neq E$ donc il existe $e_2 \in E$ tel que $e_2 \notin Kerf \quad (*)$

$f(e_2) \in Imf$ et $Imf = Kerf$ d'après la question 2). Donc $f(e_2) \in Kerf$.
Il existe donc $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f(e_2) = \lambda e_1$.

La famille (e_1, e_2) est libre. En effet, soient a et b des réels tels que $ae_1 + be_2 = 0$.
Alors, $be_2 = -ae_1$.
Si $b \neq 0$, on a : $e_2 = -\dfrac{a}{b}e_1 \in Kerf$, ce qui contredit $(*)$.

On a donc $b = 0$, puis $ae_1{=}0$ et $a = 0$ du fait que $e_1 \neq 0$.

(e_1, e_2) est une famille libre de vecteurs de E dont le cardinal vaut 2 et coïncide avec la dimension de E. Donc (e_1, e_2) est une base de E.

Formons la matrice de f dans la base (e_1, e_2).

$f(e_1) = 0 = 0e_1 + 0e_2 \quad$ et $\quad f(e_2) = \lambda e_1 = \lambda e_1 + 0e_2$.

Donc $\mathscr{M}_{(e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice obtenue est presque de la forme souhaitée.

Comme $f \neq 0$, on a $\lambda \neq 0$. On peut poser $e_2' = \dfrac{1}{\lambda}e_2$.

On a : $f(e_1) = 0 = 0e_1 + 0e_2' \quad$ et $\quad f(e_2') = f\left(\dfrac{1}{\lambda}e_2\right) = \dfrac{1}{\lambda}f(e_2) = \dfrac{1}{\lambda}\lambda e_1 = e_1$.

Posons $\mathscr{B} = (e_1, e_2')$.

On a alors : $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.