DM5
à rendre le lundi / /

Exercice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On rappelle que la famille $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

1) Vérifier que A n'est pas inversible.

2) Déterminer les valeurs propres de A et une base des sous-espaces propres de A.

Dans la suite de cet exercice, on considère l'application f définie sur $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}), f(M) = AM.$$

3)Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

4)a)Déterminer une base de $Kerf$ et vérifier que $Kerf$ est de dimension 2.

b) En déduire la dimension de Imf, puis une base de Imf.

5)a)Vérifier que la matrice B de f dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

b)Déterminer les valeurs propres de B et une base des sous-espaces propres de B.

c)B est-elle diagonalisable ? inversible ?