Correction DM12 cubes

Exercice :

1)• $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ comme composée de fonctions continues.
$t \mapsto x+t$ est continue sur $[0,+\infty[$ (pol.) et ne s'annule pas car $\forall t \geq 0,\ x+t \geq x > 0$.
Par inverse, $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

• $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t$ est une intégrale impropre en $+\infty$.

$\forall t \geq 0,\ x+t \geq x$ donc $\dfrac{1}{x+t} \leq \dfrac{1}{x}$, puis $\dfrac{e^{-t}}{x+t} \leq \dfrac{e^{-t}}{x}$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}dt$ converge car elle a même nature que l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$.

D'après le critère de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t$ converge, ce qui prouve que $f(x)$ existe pour tout $x > 0$.

2)• Soit $x > 0$.

Partons de la relation de Chasles : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

D'une part, on a : $\forall t \geq 1,\ \dfrac{e^{-t}}{x+t} \geq 0$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t \geq 0 \quad (1)$

D'autre part, on a $\forall t \in [0,1],\ e^{-t} \geq e^{-1}$ donc $\dfrac{e^{-t}}{x+t} \geq \dfrac{e^{-1}}{x+t}$, ce qui donne en intégrant entre les bornes croissantes 0 et 1 :

$$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\mathrm{d}t \quad (2)$$

En ajoutant (1) et (2) et compte tenu de la relation de Chasles, on déduit :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\mathrm{d}t$, c'est-à-dire : $\forall x > 0,\ f(x) \geq \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\mathrm{d}t$.

• $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\mathrm{d}t = e^{-1}\int_0^1 \frac{1}{x+t}\mathrm{d}t = e^{-1}\big[\ln(x+t)\big]_0^1 = e^{-1}\big(\ln(x+1) - \ln x\big)$.

Donc $\forall x > 0,\ f(x) \geq e^{-1}\big(\ln(x+1) - \ln x\big)$.

Enfin, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} e^{-1}\big(\ln(x+1) - \ln x\big) = \lim_{x\to 0^+} e^{-1}\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$.

Par passage à la limite, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

3)Soit $x > 0$.

• $\forall t \geq 0,\ \dfrac{e^{-t}}{x+t} > 0$ et $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t > 0$.

• On a vu dans la question 1) que $\forall t \geq 0, \dfrac{e^{-t}}{x+t} \leq \dfrac{e^{-t}}{x}$.

En intégrant entre les bornes croissantes 0 et $+\infty$, on obtient :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\mathrm{d}t$, c'est-à-dire : $f(x) \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$.

Enfin, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^A = \lim_{A\to+\infty}\left[1-e^{-A}\right] = 1$.

Donc $f(x) \leq \dfrac{1}{x}$.

On conclut que $\forall x > 0,\ 0 < f(x) \leq \dfrac{1}{x}$.

• $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$. D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4)a)• $te^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{te^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+\infty} t^3e^{-t} = 0$ par croissances comparées.

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ converge car c'est une intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$.

D'après le critère de négligeabilité, $\displaystyle\int_1^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

Enfin, $\displaystyle\int_0^{1} te^{-t}\mathrm{d}t$ converge car ce n'est pas une intégrale impropre du fait de la continuité de $t \mapsto te^{-t}$ sur $[0,1]$.

Par Chasles, on conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

• Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|f(x)-\frac{1}{x}\right| &= \left|\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}}{x+t}-\frac{e^{-t}}{x}\right)\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^{+\infty}\frac{-te^{-t}}{x(x+t)}\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^{+\infty}\left|\frac{-te^{-t}}{x(x+t)}\right|\mathrm{d}t \quad \text{grâce à l'inégalité triangulaire} \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{te^{-t}}{x(x+t)}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On a donc $\forall x > 0,\ \left|f(x)-\dfrac{1}{x}\right| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{te^{-t}}{x(x+t)}\mathrm{d}t \quad (3)$

Enfin, $\forall t \geq 0,\ x(x+t) \geq x^2$ donc $\dfrac{te^{-t}}{x(x+t)} \leq \dfrac{te^{-t}}{x^2}$, ce qui donne en intégrant :

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{te^{-t}}{x(x+t)}\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty}\frac{te^{-t}}{x^2}\mathrm{d}t \quad (4)$

En recollant (3) et (4), on a :

$\forall x > 0,\ \left|f(x) - \dfrac{1}{x}\right| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{te^{-t}}{x^2}\mathrm{d}t$, c'est-à-dire : $\left|f(x) - \dfrac{1}{x}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$.

b)On sait que $\forall x > 0,\ 0 \leq \left|f(x) - \dfrac{1}{x}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t \quad (5)$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t = 0.$

D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left|f(x) - \dfrac{1}{x}\right| = 0$, ce qui malheureusement ne permet pas de conclure que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$. Il faut donc être plus fin !

Dans (5), multiplions membre à membre par x, on obtient pour tout $x > 0$:

$0 \leq x\left|f(x) - \dfrac{1}{x}\right| \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$

$0 \leq \left|x\left(f(x) - \dfrac{1}{x}\right)\right| \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$ car $|x| = x$ du fait que $x > 0$.

Ainsi, $\forall x > 0,\ 0 \leq |xf(x) - 1| \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t.$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t = 0.$

D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} |xf(x) - 1| = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 1.$

Ceci montre que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

5)Soient des réels $x > 0$ et $h \neq 0$ tels que $h > -\dfrac{x}{2}$.

a)$\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t$ est une intégrale impropre en $+\infty$.

$\forall t \geq 0,\ e^{-t} \leq 1$ et $\dfrac{1}{(x+t)^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$ donc par produit, $\dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}dt$ converge (Riemann).

D'après le critère de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t$ converge.

D'où la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t$.

b)Pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| &= \left|\frac{-1}{(x+h+t)(x+t)} + \frac{1}{(x+t)^2}\right| \\
&= \left|\frac{-(x+t)+(x+h+t)}{(x+h+t)(x+t)^2}\right| \\
&= \frac{|h|}{|x+h+t|(x+t)^2} \quad (6)
\end{aligned}$$

$(x+t)^2 \geq x^2 \quad (7)$

Par hypothèse, $h > -\dfrac{x}{2}$ donc $x+h > \dfrac{x}{2}$, puis $x+h+t > \dfrac{x}{2} > 0$

donc $|x+h+t| > \dfrac{x}{2} \quad (8)$

En multipliant (7) et (8), on a : $|x+h+t|(x+t)^2 \geq \dfrac{x^3}{2}$.

Par inverse, $\dfrac{1}{|x+h+t|(x+t)^2} \leq \dfrac{2}{x^3}$, puis $\dfrac{|h|}{|x+h+t|(x+t)^2} \leq \dfrac{2|h|}{x^3} \quad (9)$

En recollant (6) et (9), on conclut que $\left|\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h+t} - \dfrac{1}{x+t}\right) + \dfrac{1}{(x+t)^2}\right| \leq \dfrac{2|h|}{x^3}$.

c) $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t\right|$

$= \left|\dfrac{1}{h}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+h+t}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t\right) + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t\right|$

$= \left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right)e^{-t}\mathrm{d}t\right|$

$\leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\left(\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right)e^{-t}\right|\mathrm{d}t$ (inégalité triangulaire)

$= \displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right|e^{-t}\mathrm{d}t \quad (10)$

Enfin, la question 5)b) donne :

$\left|\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h+t} - \dfrac{1}{x+t}\right) + \dfrac{1}{(x+t)^2}\right|e^{-t} \leq \dfrac{2|h|}{x^3}e^{-t}$, puis par intégration :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right|e^{-t}\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \frac{2|h|}{x^3}e^{-t}\mathrm{d}t$

De (10), on déduit :

$\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t\right| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2|h|}{x^3}e^{-t}\mathrm{d}t$,

d'où $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t\right| \leq \dfrac{2|h|}{x^3}$, puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$.

6)Soit $a > 0$ fixé. En utilisant la question précédente avec $x \to a$, on a :

$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{2|h|}{a^3} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(a+t)^2}\mathrm{d}t\right| = 0$ (gendarmes).

Donc $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(a+t)^2}\mathrm{d}t$.

Cela prouve que f est dérivable en a et que $f'(a) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(a+t)^2}\mathrm{d}t$.

Ainsi, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\mathrm{d}t.$$