Exercice 1 (eml 2024)

Partie A

1)a)D'après le cours, les solutions de l'équation différentielle $x' = -x$ ou encore $x' + x = 0$ sont les fonctions $t \mapsto \beta e^{-t}$, où $\beta \in \mathbf{R}$.

b)Soit $x_0 : t \mapsto (at+b)e^{-t}$ avec $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

x_0 est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme produit et composée de fonction dérivables.
$\forall t \in \mathbf{R},\ x_0'(t) = ae^{-t} + (at+b) \times (-e^{-t}) = (a - at - b)e^{-t}$.

x_0 est solution de (E)

$\Longleftrightarrow \forall t \in \mathbf{R},\ x_0'(t) + x_0(t) = e^{-t}$

$\Longleftrightarrow \forall t \in \mathbf{R},\ (a - at - b)e^{-t} + (at+b)e^{-t} = e^{-t}$

$\Longleftrightarrow \forall t \in \mathbf{R},\ ae^{-t} = e^{-t}$

$\Longleftrightarrow a = 1$ et $b \in \mathbf{R}$.

En prenant par exemple $b = 0$, la fonction $x_0 : t \mapsto te^{-t}$ est alors solution particulière de (E).

c)D'après le cours, les solutions de (E) s'obtiennent en faisant la somme d'une solution particulière de (E_0) avec toutes les solutions de l'équation homogène associée.
Donc les solutions de (E) sont $t \mapsto te^{-t} + \beta e^{-t}$, c'est-à-dire $t \mapsto (t+\beta)e^{-t}$ où $\beta \in \mathbf{R}$.

2)a)• Le système différentiel (S) s'écrit matriciellement sous la forme :

$\forall t \in \mathbf{R},\ X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

• A est triangulaire. Ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. -1 est donc l'unique valeur propre de A.
Raisonnons par l'absurde. Supposons A diagonalisable. Alors, elle peut s'écrire sous la forme

$$A = PDP^{-1} \quad (*)$$

où D est une matrice diagonale qui porte sur sa diagonale les valeurs propres de A. Cela impose que $D = -I$.

En remplaçant dans $(*)$, on tire : $A = P(-I)P^{-1} = -I$, ce qui est absurde.
Donc A n'est pas diagonalisable.

b)Cela revient à montrer qu'il existe une unique fonction vectorielle X telle que $\forall t \in \mathbf{R},\ X'(t) = AX(t)$ et $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'existence et l'unicité de cette fonction est assurée par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Ainsi, il existe une unique solution (x,y) de (S) telle que $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$.

c)Soit (x,y) la solution de (S) vérifiant $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$.

$\forall t \in \mathbf{R},\ y'(t) = -y(t)$ donc y est de la forme $y : t \mapsto \beta e^{-t}$, où $\beta \in \mathbf{R}$.
La condition $y(0) = 1$ donne $\beta e^{0t} = 1$, c'est-à-dire $\beta = 1$.
Donc $\forall t \in \mathbf{R},\ y(t) = e^{-t}$.

En remplaçant dans la première équation de (S), on obtient :
$\forall t \in \mathbf{R},\ x'(t) = -x(t) + e^{-t}$.
D'après la question 1)c), $\exists \beta \in \mathbf{R}, \forall t \in \mathbf{R},\ x(t) = (t+\beta)e^{-t}$.
La condition $x(0) = 1$ donne : $1 = \beta e^0$, d'où $\beta = 1$.
On obtient finalement $x : t \mapsto (t+1)e^{-t}$ et $y : t \mapsto e^{-t}$.
d) $\lim\limits_{t \to +\infty} te^{-t} = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$.
Par somme, $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$. Et on a aussi $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$.
Donc la trajectoire de la solution (x, y) converge vers (0,0).
De plus (0,0) est un point d'équilibre de (S) puisque le couple de fonctions nulles est solution de (S).
3)Programme Python :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
T=np.linspace(-2,10,200)
x=[(t +1)*np.exp(-t) for t in T]
y=[np.exp (-t) for t in T]
plt.title(" Trajectoire de la solution ")
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

Partie B

4)a) $\lim\limits_{x \to +\infty} kx = +\infty$ car $k > 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$. Par composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{kx} = +\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = +\infty$.
Quand $x \to -\infty$, on écrit : $f_k(x) = xe^{kx} + e^{kx}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{kx} = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{kx} = 0$.
Par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = 0$.
b)f_k est dérivable sur $\mathbf{R}$ par produit et composée de fonctions dérivables.
$\forall x \in \mathbf{R},\ f_k'(x) = 1 \times e^{kx} + (x+1)ke^{kx} = (kx + k + 1)e^{kx}$.
$f_k'(x) \geq 0 \iff kx + k + 1 \geq 0 \iff kx \geq -k - 1 \iff x \geq -1 - \dfrac{1}{k}$.

x	$-\infty$		$-1-\dfrac{1}{k}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_k(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{ke^{k+1}}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f_k(-1) = 0$ et $f_k(0) = 1$.

5)a)Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}f_{k+1}(x) - f_k(x) &= (x+1)e^{(k+1)x} - (x+1)e^{kx} \\ &= (x+1)e^{kx}e^x - (x+1)e^{kx} \\ &= (x+1)e^{kx}(e^x - 1).\end{aligned}$$

$e^{kx} > 0$ donc $f_{k+1}(x) - f_k(x)$ est du signe de $(x+1)(e^x - 1)$.

Or, $e^x - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow e^x \geq 1 \Longleftrightarrow x \geq 0$.

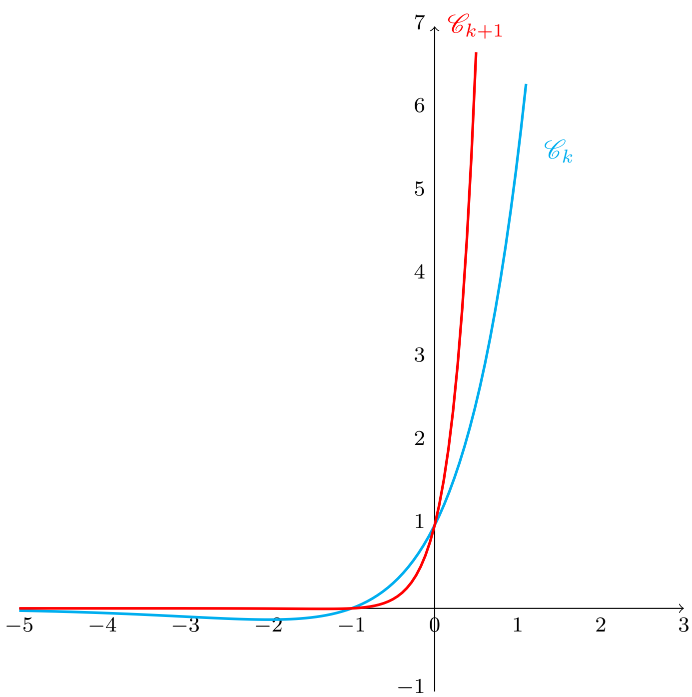
On fait un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f_{k+1}(x) - f_k(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On déduit que $\mathscr{C}_{k+1}$ est au-dessus de $\mathscr{C}_k$ sur $]-\infty, -1]$ et sur $[0, +\infty[$.
$\mathscr{C}_{k+1}$ est au-dessous de $\mathscr{C}_k$ sur $[-1, 0]$.

Les points d'intersection de $\mathscr{C}_{k+1}$ et $\mathscr{C}_k$ ont pour abscisses -1 et 0.
Ce sont les points $(-1, 0)$ et $(0, 1)$.

b)Graphique :



Partie C

a)Soit $k \in \mathbf{N}^*$.
f_k est négative sur $]-\infty,-1]$ donc l'équation $f_k(x)=k$ n'a pas de solution sur $]-\infty,-1]$.

f_k est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[-1,+\infty[$. Elle réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur $f\big([-1,+\infty[\big)=[0,+\infty[$.

$k\in[0,+\infty[$ admet donc un unique antécédent $u_k \in [-1,+\infty[$.

Ainsi, l'équation $f_k(x)=k$ admet une unique solution u_k et $u_k \geq -1$.

b)$f_1(0)=1$ et par construction, $f_1(u_1)=1$. Par unicité de la solution, $u_1=1$.

7)$f_k(0)=1$ et $f_k(u_k)=k$.

De plus, $f_k\left(\dfrac{\ln k}{k}\right)=\left(\dfrac{\ln k}{k}+1\right)e^{k\times\frac{\ln k}{k}}=\left(\dfrac{\ln k}{k}+1\right)k=\ln k+k$.

Comme $k\geq 1$, on a $\ln k \geq 0$, puis $\ln k + k \geq k$.

On déduit : $f_k(0)\leq f_k(u_k)\leq f_k\left(\dfrac{\ln k}{k}\right)$.

Les réels 0, u_k et $\dfrac{\ln k}{k}$ appartiennent à $[-1,+\infty[$ et f est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$.

Donc $0\leq u_k \leq \dfrac{\ln k}{k}$.

$\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\ln k}{k}=0$ par croissances comparées.

D'après la propriété des gendarmes, $\lim\limits_{k\to+\infty}u_k=0$.

8)a)$f_k(u_k)=k$
$\iff (u_k+1)e^{ku_k}=k$
$\iff \ln\big((u_k+1)e^{ku_k}\big)=\ln k$
$\iff \ln(u_k+1)+\ln\left(e^{ku_k}\right)=\ln k$
$\iff \ln(u_k+1)+u_k\underbrace{\ln\left(e^{k}\right)}_{=k}=\ln k$
$\iff ku_k=\ln k-\ln(u_k+1)$
$\iff u_k=\dfrac{\ln k}{k}-\dfrac{\ln(u_k+1)}{k}$.

b)$\dfrac{u_k}{\frac{\ln k}{k}}=\dfrac{ku_k}{\ln k}=\dfrac{\ln k-\ln(u_k+1)}{\ln k}=1-\dfrac{\ln(u_k+1)}{\ln k}$.

$\lim\limits_{k\to+\infty}u_k+1=1$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty}\ln(u_k+1)=0$.

$\lim\limits_{k\to+\infty}\ln k=+\infty$.

Par quotient, $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\ln(u_k+1)}{\ln k}=0$.

On conclut que $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{u_k}{\frac{\ln k}{k}}=1$. Donc $u_k \underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\ln k}{k}$.

c)$\forall k \geq 3,\ \ln k \geq 1$ donc $\dfrac{\ln k}{k} \geq \dfrac{1}{k}$.

La série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ diverge (série harmonique).

D'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\ln k}{k}$ diverge.

Par ailleurs, $u_k \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln k}{k}$.

D'après le critère d'équivalence sur les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} u_k$ a même nature que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\ln k}{k}$.

Donc la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} u_k$ diverge.

Exercice 2 (eml 2024)

Partie A

1)On trouve $A^2 = -I_2$.

On déduit : $A \times (-A) = I_2$, ce qui prouve que A est inversible et que $A^{-1} = -A$.

2)Posons $P(X) = X^2 + 1$.
$P(A) = A^2 + I_2 = 0$ donc P est un polynôme annulateur de A.

Les valeurs propres de A sont à chercher parmi les racines de P.
Or, $\forall x \in \mathbf{R},\ P(x) \geq 1$. Donc P n'a pas de racine.

On conclut que A n'a pas de valeur propre, elle n'est donc pas diagonalisable.

3)$\mathscr{C}$ est une partie de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ par construction. Elle n'est pas vide puisque $0 \in \mathscr{C}$.

De plus, pour toutes matrices M et N de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, pour tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned} A(\lambda M + N) &= A\lambda M + AN \\ &= \lambda AM + AN \\ &= \lambda MA + NA \quad \text{car } M \in \mathscr{C} \text{ et } N \in \mathscr{C} \\ &= (\lambda M + N)A. \end{aligned}$$

Donc $\lambda M + N \in \mathscr{C}$.

On conclut que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

4)a)Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} AM = MA &\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} b = -c \\ a = d \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{C} = \left\{ \begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix},\ (c,d) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

b)(I_2, A) est une famille libre car I_2 et A ne sont pas colinéaires.

De plus, la question précédente donne :

$$\mathscr{C} = \left\{ d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ (c,d) \in \mathbf{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\,(I_2, A).$$

Donc (I_2, A) est une famille génératrice de $\mathscr{C}$.

(I_2, A) est donc une base de $\mathscr{C}$.

5)a)$M \in \mathscr{C}$ et $N \in \mathscr{C}$ donc $AM = MA$ et $AN = NA$.

On a alors : $A(MN) = (AM)N = (MA)N = M(AN) = M(NA) = (MN)A$. Donc $MN \in \mathscr{C}$.

b)M et N étant éléments de $\mathscr{C}$, elles s'expriment comme combinaison linéaire de I_2 et A, puisque (I_2, A) est une base de $\mathscr{C}$.

Posons $M = aI_2 + bA$ et $N = cI_2 + dA$. On a alors :

$$\begin{aligned}MN &= (aI_2+bA)(cI_2+dA)\\ &= acI_2^2+adI_2A+bcAI_2+bdA^2\\ &= acI_2+(ad+bc)A+bdA^2\\ &= (ac-bd)I_2+(ad+bc)A \quad \text{car } A^2=-I_2\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}NM &= (cI_2+dA)(aI_2+bA)\\ &= caI_2^2+cbI_2A+daAI_2+dbA^2\\ &= caI_2+(cb+da)A+dbA^2\\ &= (ca-db)I_2+(cb+da)A.\end{aligned}$$

Donc $MN=NM$.

6)Soit M une matrice non nulle de $\mathscr{C}$.

D'après 4)a), elle est donc de la forme : $M=\begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix}$.

$detM=c^2+d^2>0$ car $(c,d)\neq(0,0)$ du fait que M est non nulle.

Donc M est inversible.

Le cours donne : $M^{-1}=\dfrac{1}{c^2+d^2}\begin{pmatrix} d & c \\ -c & d \end{pmatrix}=\dfrac{d}{c^2+d^2}I_2-\dfrac{c}{c^2+d^2}A.$

M^{-1} est une combinaison linéaire de I_2 et A. Donc $M^{-1}\in\mathscr{C}$.

Partie B

7)a)Soit $M=aI_2+bA$.

$$\begin{aligned}M^2 &= (aI_2+bA)(aI_2+bA)\\ &= a^2I_2+abI_2A+baAI_2+b^2A^2\\ &= (a^2-b^2)I_2+2abA \quad \text{car } A^2=-I_2.\end{aligned}$$

b)$$\begin{aligned}P(M)=0_2 &\iff M^2+uM+vI_2=0_2\\ &\iff (a^2-b^2)I_2+2abA+u(aI_2+bA)+vI_2=0_2\\ &\iff (a^2-b^2+ua+v)I_2+(2ab+ub)A=0\\ &\iff \begin{cases} a^2-b^2+ua+v=0\\ 2ab+ub=0\end{cases}\end{aligned}$$

la dernière équivalence provenant du fait que la famille (I_2,A) est libre.

8)a)Si $\Delta\geq 0$, l'équation $x^2+ux+v=0$ admet au moins une solution. Soit a l'une d'entre elles. On a alors : $a^2+ua+v=0$.

$(a,0)$ est alors solution du système 7)b) car : $\begin{cases} a^2-0^2+ua+v=0\\ 2a\times 0+u\times 0=0\end{cases}$

b)Prenons $a=-\dfrac{u}{2}$.

Pour tout $b\in\mathbf{R}$, on a alors : $2ab+ub=2\times\left(-\dfrac{u}{2}\right)b+ub=-ub+ub=0$.

$\Delta<0$ donc $\forall x\in\mathbf{R},\ x^2+ux+v>0$. En particulier, $a^2+ua+v>0$.

Posons $b=\sqrt{a^2+ua+v}$. On a $b\neq 0$.

De plus, $a^2 - b^2 + ua + v = a^2 - \big(a^2 + ua + v\big) + ua + v = 0$.

Le couple (a, b) est donc bien solution du système 7)b).

9)Soit $M = aI_2 + bA$ une matrice de $\mathscr{C}$.

En appliquant la question 7) avec $u = 1$ et $v = 1$, on a :

$M^2 + M + I_2 = 0 \Longleftrightarrow (S) \left\{ \begin{array}{c} a^2 - b^2 + a + 1 = 0 \\ 2ab + b = 0 \end{array} \right.$

On a alors : $\Delta = u^2 - 4v = -3 < 0$.

La question 8)b) donne une solution (a, b) de (S) avec :

$a = -\dfrac{u}{2} = -\dfrac{1}{2}$ et $b = \sqrt{a^2 + ua + v} = \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$M = -\dfrac{1}{2}I_2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}A$ est donc telle que $M^2 + M + I_2 = 0$.

C'est-à-dire : $M = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Partie C

10)$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}),\ \varphi(M) \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ comme produit de matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

Pour toutes matrices M et N de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. Pour tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N)A \\ &= (A\lambda M + AN)A \\ &= \lambda AMA + ANA \\ &= \lambda\varphi(M) + \varphi(N). \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire, et par suite un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

11)Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, on a :

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \varphi)(M) &= \varphi\big(\varphi(M)\big) \\ &= \varphi(AMA) \\ &= A(AMA)A \\ &= A^2MA^2 \\ &= (-I_2)M(-I_2) \\ &= M. \end{aligned}$$

Donc $\varphi \circ \varphi = Id_{\mathscr{M}_2(\mathbf{R})}$.

12)a)$\varphi(E_1) = AE_1A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\varphi(E_2) = AE_2A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\varphi(E_3) = AE_3A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\varphi(E_4) = AE_4A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On constate que $\varphi(E_1) = -E_4$, $\varphi(E_2) = E_3$, $\varphi(E_3) = E_2$ et $\varphi(E_4) = -E_1$.

Donc la matrice de φ dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b)B est symétrique donc diagonalisable.

De l'égalité $B^2 = I_4$, on tire : $(B - I_4)(B + I_4) = 0 \quad (*)$

Supposons $B - I_4$ inversible.
En multipliant à gauche de $(*)$ par $(B - I_4)^{-1}$, on a : $B + I_4 = 0_4$.
Soit $B = -I_4$, ce qui est absurde.
Donc $B - I_4$ n'est pas inversible, ce qui montre que 1 est valeur propre de B.

Supposons $B + I_4$ inversible.
En multipliant à droite de $(*)$ par $(B + I_4)^{-1}$, on a : $B - I_4 = 0_4$.
Soit $B = I_4$, ce qui est absurde.
Donc $B + I_4$ n'est pas inversible, ce qui montre que -1 est valeur propre de B.

On a établi que $\{-1, 1\} \subset sp(B)$.

Par ailleurs, $P(X) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de B car
$P(B) = B^2 - I_4 = 0_4$.
Les racines de P sont -1 et 1. Donc $sp(B) \subset \{-1, 1\}$.

Finalement, $sp(B) = \{-1, 1\}$.

c)• $E_1(B) = \{U \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R}) \mid (B - I)U = 0\}$

Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$$(B - I)U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -x - t = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = z \end{cases}$$

Donc $E_1(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = -t, y = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ z \\ z \\ t \end{pmatrix}, (z, t) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

On conclut que $E_1(B) = \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=U_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=U_2}\right)$.

Donc (U_1, U_2) est une famille génératrice de $E_1(B)$.

C'est une famille libre car U_1 et U_2 ne sont pas colinéaires.

Donc (U_1, U_2) est une base de $E_1(B)$.

• $E_{-1}(B) = \{U \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R}) \mid (B+I)U = 0\}$

Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
(B+I)U = 0 &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - t = 0 \\ y + z = 0 \\ -x + t = 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = t \\ y = -z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc $E_{-1}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = t, y = -z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -z \\ z \\ t \end{pmatrix}, (z,t) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

On conclut que $E_{-1}(B) = \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=U_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=U_4}\right)$.

Donc (U_3, U_4) est une famille génératrice de $E_{-1}(B)$.

C'est une famille libre car U_3 et U_4 ne sont pas colinéaires.

Donc (U_3, U_4) est une base de $E_{-1}(B)$.

Exercice 3 (eml 2024)

Partie A

1)Soit $k \in \mathbf{N}^*$.
$X_k(\Omega) = [\![1, N]\!]$ et $\forall i \in [\![1, N]\!],\ P(X_k = i) = \dfrac{1}{N}$, du fait de la remise de la boule.
Donc $X_k \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1, N]\!]\big)$.

2)La liste L est modifiée si et seulement si l'entier x n'appartient pas à la liste. Dans ce cas, on ajoute à cette liste l'élément x en le plaçant en dernière position de la liste.

3)Programme :

```
def simul_T(N,i):
    L = []
    k = 0
    while len(L)<i :
        x = rd. randint (1,N+1)
        ajout (L,x)
        k = k+1
    return k
```

Explications
Ligne 4 : on entre dans la boucle tant qu'on n'a pas eu i numéros distincts.

Ligne 5 : on fait un tirage en choisissant une boule parmi N

Ligne 6 : si cette boule n'a encore jamais été tirée, on l'ajoute à la liste L

Ligne 7 : on augmente le compteur k de 1, k représentant le numéro de tirage.

Ligne 8 : on retourne la valeur k qui correspond au numéro de tirage, où l'on obtient pour la première fois i numéros distincts.

4)programme

```
s=0
for j in range (100):
    s=s+simul_T (3 ,2)
print (s/100)
```

Ce programme renvoie la moyenne de 100 réalisations de la variable aléatoire T_2. Du fait de la loi faible des grands nombres, cette moyenne est proche de l'espérance de T_2.

Partie B

5)T_2 est la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir deux numéros différents. Il en faut au minimum deux, et ce nombre peut être arbitrairement grand, si l'on obtient toujours le même numéro au début.
Donc $T_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.

6)a)L'événement $(T_2 = k) \cap (X_1 = 1)$ est réalisé si et seulement si l'on tire la boule 1 au premier tirage et s'il faut k tirages pour obtenir deux numéros différents.

Il se réalise donc si et seulement si les $k-1$ premiers tirages amènent le numéro 1 et le k-ème tirage n'amène pas le numéro 1.

Ainsi, $(T_2 = k) \cap (X_1 = 1) = (X_1 = 1) \cap ... \cap (X_{k-1} = 1) \cap (X_k \neq 1)$.

b)Les variables aléatoires X_1, ..., X_{k-1}, X_k sont mutuellement indépendantes car la boule est remise dans l'urne après chaque tirage.
De la question précédente, on déduit alors :

$$\begin{aligned}P\big((T_2 = k) \cap (X_1 = 1)\big) &= P(X_1 = 1) \times \cdots \times P(X_{k-1} = 1) \times P(X_k \neq 1)\\ &= \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.\end{aligned}$$

c)Avec le même raisonnement que précédemment, on a :

$P\big((T_2 = k) \cap (X_1 = 2)\big) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ et $P\big((T_2 = k) \cap (X_1 = 3)\big) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$.

La formule des probas totales pour le sce $\big((X_1 = 1), (X_1 = 2), (X_1 = 3)\big)$ donne :

$P(T_2 = k)$

$= P\big((T_2 = k) \cap (X_1 = 1)\big) + P\big((T_2 = k) \cap (X_1 = 2)\big) + P\big((T_2 = k) \cap (X_1 = 3)\big)$

$= 3 \times \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

$= \frac{2}{3^{k-1}}$.

7)T_2 admet une espérance si et seulement si $\sum_{k\geq 2} |kP(T_2 = k)|$ converge.

Comme $\forall k \geq 2,\ kP(T_2 = k) \geq 0$, la valeur absolue est inutile.

T_2 admet donc une espérance si et seulement si $\sum_{k\geq 2} kP(T_2 = k)$ converge.

Or, $\forall k \geq 2,\ kP(T_2 = k) = k \times \frac{2}{3^{k-1}} = 2 \times k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$.

$\sum_{k\geq 2} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ converge en tant que série dérivée première de paramètre $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$.

Donc $\sum_{k\geq 2} kP(T_2 = k)$ converge et T_2 admet une espérance.

$E(T_2) = \sum_{k=2}^{+\infty} kP(T_2 = k) = 2\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 2\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \times k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{0}\right)$

C'est-à-dire : $E(T_2) = 2\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} - 1\right) = 2\left(\frac{9}{4} - 1\right) = \frac{5}{2}$.

8)$T_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$ donc $Z_2(\Omega) = \mathbf{N}^*$.

$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(Z_2 = k) = P(T_2 - 1 = k) = P(T_2 = k+1) = \frac{2}{3^k}$ en utilisant 6)c) avec $k \to k+1$.

Or, $\dfrac{2}{3^k} = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$. Donc $Z_2 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

D'après le cours Z_2 admet une espérance et une variance données par :

$E(Z_2) = \dfrac{1}{2/3} = \dfrac{3}{2}$

et $V(Z_2) = \dfrac{\frac{1}{3}}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{3}{4}$.

On déduit : $E(T_2) = E(Z_2 + 1) = E(Z_2) + 1 = \dfrac{5}{2}$

et $V(T_2) = V(1Z_2 + 1) = 1^2 V(Z_2) = \dfrac{3}{4}$.

Partie C

9)a)Après le T_{i-1}-ème tirage, on a déjà tiré exactement $i-1$ numéros distincts.
Il reste alors $N-(i-1) = N-i+1$ numéros qu'on a pas encore tirés.
Dans les tirages qui suivent, la probabilité de tirer un numéro non encore tiré (=succès) est de $\dfrac{N-i+1}{N}$.
Les tirages sont successifs et indépendants.
Z_i compte le rang d'obtention du premier succès. Donc $Z_i \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{N-i+1}{N}\right)$.

b)D'après le cours Z_i admet une espérance et une variance données par :

$E(Z_i) = \dfrac{N}{N-i+1}$

$V(Z_i) = \dfrac{1 - \frac{N-i+1}{N}}{\left(\frac{N-i+1}{N}\right)^2} = \dfrac{i-1}{N} \times \dfrac{N^2}{(N-i+1)^2} = \dfrac{N(i-1)}{(N-i+1)^2}$.

Z_1 est certaine et vaut 1. On a donc $E(Z_1) = 1$ et $V(Z_1) = 0$, ce qui est en conformité avec les formules trouvées ci-dessus en calculant pour $i = 1$.

10)Soit $i \geq 2$.
En sommant l'égalité $Z_k = T_k - T_{k-1}$ pour $k \in [\![2, i]\!]$, on a :

$\displaystyle\sum_{k=2}^{i} Z_k = \sum_{k=2}^{i} (T_k - T_{k-1}) = T_i - T_1$ par télescopage.

D'où $T_i = T_1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{i} Z_k = 1 + \sum_{k=2}^{i} Z_k = Z_1 + \sum_{k=2}^{i} Z_k = \sum_{k=1}^{i} Z_k$.

L'égalité $T_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} Z_k$ reste vraie pour $i = 1$ puisque $T_1 = Z_1 = 1$.

On a donc $\forall i \in [\![1, N]\!],\ T_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} Z_k$.

11)a)Soient $l \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \mathbf{N}^*$.

$P\big((Z_2=l)\cap(Z_3=k)\big)$
$= P(Z_2=l)P(Z_3=k)$ car Z_2 et Z_3 sont indépendantes
$= \dfrac{N-1}{N}\left(\dfrac{1}{N}\right)^{l-1}\times\dfrac{N-2}{N}\left(\dfrac{2}{N}\right)^{k-1}$ car $Z_2 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{N-1}{N}\right)$ et $Z_3 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{N-2}{N}\right)$
$= \dfrac{(N-1)(N-2)2^{k-1}}{N^{k+l}}$.

b)$Z_2(\Omega)=Z_3(\Omega)=\mathbf{N}^*$ donc $(Z_2+Z_3)(\Omega)=[\![2,+\infty[\![$.

La formule des probabilités totales pour le système complet $(Z_2=l)_{l\in\mathbf{N}^*}$ donne pour tout entier $n\geq 2$:

$$\begin{aligned}P(Z_2+Z_3=n) &= \sum_{l=1}^{+\infty} P\big((Z_2+Z_3=n)\cap(Z_2=l)\big)\\ &= \sum_{l=1}^{+\infty} P\big((Z_2=l)\cap(Z_3=n-l)\big).\end{aligned}$$

Or, $P(Z_3=n-l)=0$ si $n-l\leq 0$, c'est-à-dire si $l\geq n$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } P(Z_2+Z_3=n) &= \sum_{l=1}^{n-1} P\big((Z_2=l)\cap(Z_3=n-l)\big)\\ &= \sum_{l=1}^{n-1}\frac{(N-1)(N-2)2^{n-l-1}}{N^n} \qquad \text{11)a) avec } k\to n-l\\ &= \sum_{j=0}^{n-2}\frac{(N-1)(N-2)2^j}{N^n} \quad \text{en posant } j=n-l-1\\ &= \frac{(N-1)(N-2)}{N^n}\sum_{j=0}^{n-2}2^j\\ &= \frac{(N-1)(N-2)}{N^n}\times\frac{2^{n-1}-1}{2-1}\\ &= \frac{(N-1)(N-2)}{2}\times\frac{2^n-2}{N^n}\\ &= \frac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\left(\frac{2}{N}\right)^n-\frac{2}{N^n}\right).\end{aligned}$$

c)D'après 10), on a : $T_3=Z_1+Z_2+Z_3=1+Z_2+Z_3$ donc $Z_2+Z_3=T_3-1$.

L'égalité 11)b) donne alors pour tout entier $n\geq 2$:

$P(T_3-1=n)=\dfrac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\left(\dfrac{2}{N}\right)^n-\dfrac{2}{N^n}\right)$.

En faisant $n\to n-1$, on obtient pour tout entier $n\geq 3$:

$$P(T_3=n)=\frac{(N-1)(N-2)}{2}\left(\left(\frac{2}{N}\right)^{n-1}-\frac{2}{N^{n-1}}\right).$$

12)Soit $i \in [\![1, N]\!]$.

$$\begin{aligned} E(T_i) &= E\left(\sum_{j=1}^{i} Z_j\right) \quad \text{d'après 10)} \\ &= \sum_{j=1}^{i} E(Z_j) \quad \text{par linéarité} \\ &= \sum_{j=1}^{i} \frac{N}{N-j+1} \quad \text{d'après 9)b)} \\ &= N \sum_{k=N-i+1}^{N} \frac{1}{k} \quad \text{en posant } k = N-j+1. \end{aligned}$$

13)Soient i et j deux entiers tels que $1 \leq i \leq j \leq N$.

On remarque que $T_j = Z_1 + \cdots + Z_j = (Z_1 + \cdots + Z_i) + Z_{i+1} + \cdots + Z_j$.

c'est-à-dire : $T_j = T_i + Z_{i+1} + \cdots + Z_j$.

On déduit :

$$\begin{aligned} cov(T_i, T_j) &= cov(T_i, T_i + Z_{i+1} + \cdots + Z_j) \\ &= cov(T_i, T_i) + cov(T_i, Z_{i+1} + \cdots + Z_j) \quad \text{par linéarité à droite} \\ &= V(T_i) + cov(Z_1 + \cdots + Z_i, Z_{i+1} + \cdots + Z_j). \end{aligned}$$

Comme Z_1, ..., Z_j sont indépendantes (mutuellement), toute fonction de certaines d'entre elles est indépendante de toute fonction des autres, d'après le lemme des coalition.

Ainsi, $Z_1 + \cdots + Z_i$ et $Z_{i+1} + \cdots + Z_j$ sont indépendantes.

On a donc $cov(Z_1 + \cdots + Z_i, Z_{i+1} + \cdots + Z_j) = 0$.

On conclut que $cov(T_i, T_j) = V(T_i)$.