DM8
à rendre le lundi / /

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par $f_n(x) = nx - e^{-x}$.

1)Justifier que f_n est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer $f_n'(x)$.

2)Etudier les variations de f_n et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.

3)Justifier que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution.
On la note U_n.

4)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 < U_n < \dfrac{1}{n}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

5)Etablir que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ U_n = \dfrac{e^{-U_n}}{n}$, puis donner un équivalent simple de U_n quand $n \to +\infty$.

6)Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n^2$?

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose : $U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt$.

1)Justifier que U_n existe pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2)Calculer U_0 et U_1.

3)a)Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.

b)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n \leq \ln 2$.

c)Conclure que la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

4)a)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, écrire $\ln 2 - U_n$ sous forme d'une intégrale.

b)En déduire que $\forall n \in \mathbf{N},\ \ln 2 - U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

c)Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.