DS4 maths appliquées - 12/02/2025

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches, dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1.
On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note :
B_i l'événement : « le i-ème tirage donne une boule blanche », et on pose $\overline{B_i} = N_i$.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.
2. (a) Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que $P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.
   (b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $P(X = k)$, pour tout k de $X(\Omega)$.
   (c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.
   (a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :
   $$P\Big([X=k] \cap [Y=0]\Big) = \frac{n-k}{n(n-1)}.$$
   (b) En déduire $P(Y=0)$.
   (c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.
4. Simulation informatique.
   On rappelle que si a et b sont des entiers, la commande `randint(a,b)` du module `numpy.random` représente un entier aléatoire entre a et b-1.
   (a) Compléter le script `Python` suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et affiche la valeur prise par X.
   On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre `nB+1`, où `nB` désigne le nombre de boules blanches.

```
import numpy.random as rd
n=int(input("entrer n"))
nB=n-1
X=1
u=rd.randint(1,nB+2)
while u<nB+1:
    nB=.......
    u=rd.randint(1,......)
    X=........
print("la boule noire est apparue au tirage",X)
```

(b) Compléter les lignes ajoutées au script précédent afin que le script renvoie et affiche, en plus de celle prise par X, la valeur prise par Y.

```
import numpy.random as rd
n=int(input("entrer n"))
nB=n-1
X=1
Y=.....
u=rd.randint(1,nB+2)
while u<nB+1:
    if u==1 :
        Y=.....
    nB=......
    u=rd.randint(1,.....)
    X=.......
print("la boule noire est apparue au tirage",X)
print("la valeur de Y est",Y)
```

Exercice 2

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie par :

$$\forall t > 0,\ f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right).$$

Soit la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f_a(u_n).$$

0.1 Etude des variations de la fonction f_a .

1. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f_a par rapport à cette asymptote.
2. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Pour tout $t > 0$, calculer $f'_a(t)$, puis dresser le tableau de variation de f_a.
4. En déduire que :
$$\forall t > 0 \qquad f_a(t) \geq a$$

0.2 Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$..

1. Que dire de la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dans le cas particulier où $u_0 = a$?
2. Dans la suite on revient au cas général $u_0 > 0$.
Démontrer que :
$$\forall t \geq a \qquad 0 \leq f'_a(t) \leq \frac{1}{2}$$
3. Montrer que pour tout entier n, non nul :
$$u_n \geq a$$
4. Prouver alors que pour tout entier n non nul :
$$0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a)$$
Puis que :
$$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$
5. En déduire la convergence de la suite (u_n) et indiquer sa limite.
6. En utilisant ce qui précède, écrire un programme en langage Python permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite (u_n), de premier terme 1, convergeant vers $\sqrt{2}$.

0.3 Recherche d'extremum d'une fonction à deux variables.

On considère, sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction g définie par :

$$g(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1 + x)(1 + y)$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que g admet un extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dont on précisera la nature.
3. Vérifier que :
$$g(x, y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right)$$
4. En déduire que l'extremum local est un extremum global de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3

On définit, pour tous réels a et b, $M(a,b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a,b) \;=\; \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

et on note : $E = \{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

1. ***a)*** Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.
Déterminer une base de E et sa dimension.

b) Le produit de deux matrices quelconques de E appartient-il encore à E ?

2. **Étude du cas $a = 0$ et $b = 0$.**
Justifier que la matrice $M(0,0)$ est diagonalisable.

3. **Étude du cas $a \neq 0$ et $b = 0$.**
Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a,0)$.

a) Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A.

b) En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.

c) En déduire que la matrice A est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice D de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

4. **Étude du cas $a = 0$ et $b \neq 0$.**
Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0,b)$.

a) Déterminer le rang des matrices B et $B - b\,I_4$, I_4 désignant la matrice identité d'ordre 4.

b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de B en précisant la dimension des sous-espaces propres associés.

c) La matrice B est-elle diagonalisable ?

5. **Étude du cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$.**
Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $M(a,b)$.
On pose :

$$v_1 \;=\; (1,1,1,0), \qquad v_2 \;=\; (0,0,0,1) \qquad \text{et} \qquad T \;=\; \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $\text{Ker}(f)$ est de dimension 2 et préciser une base (v_3, v_4) de $\text{Ker}(f)$.

b) Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

c) Déterminer la matrice notée $N(a,b)$ de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}'$.

d) Soient λ un réel non nul et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice colonne non nulle de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Montrer :

$$X \text{ est un vecteur propre de } N(a,b) \text{ associé à la valeur propre } \lambda \iff \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } T \text{ associé à} \\ \text{la valeur propre } \lambda \\ \text{et} \\ z = t = 0 \end{array} \right.$$

e) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a,b) = (1,1)$.
Déterminer les valeurs propres de T. En déduire que la matrice $M(1,1)$ est diagonalisable.

f) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a,b) = (1,-1)$.
Justifier que T n'admet aucune valeur propre. La matrice $M(1,-1)$ est-elle diagonalisable ?

g) Montrer l'équivalence :

$$M(a,b) \text{ est diagonalisable} \iff a^2 + 10\,ab + b^2 > 0$$