DM14
à rendre le lundi / /

Exercice

Une urne contient des boules blanches et des boules noires.
La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q.
Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

Partie I :

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1)Reconnaître la loi de T. Pour tout entier $k \geq 1$, donner $P(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T.

2)En déduire que U admet une espérance et une variance.
Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.

Partie II :

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche **et** au moins une boule noire.

On considère les variables aléatoires :
X = nombre de tirages effectués,
Y = nombre de boules blanches obtenues,
Z = nombre de boules noires obtenues.

On peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ vaut 1.
Pour tout entier naturel non nul i, on note :
B_i l'événement "la i-ème boule tirée est blanche" et N_i l'événement "la i-ème boule tirée est noire".

1)a)Montrer, pour tout entier $k \geq 2$, $P(X = k) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.

b)Vérifier : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k) = 1$

c)Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$.

2)Pour tout entier $k \geq 2$, déterminer $P\big((X = k) \cap (Y = 1)\big)$.
(On distinguera les cas k=2 et k=3)

b)En déduire : $P(Y = 1) = q(1 + p)$.

c)Déterminer la loi Y.

On admet que l'espérance de Y existe et que $E(Y) = \dfrac{1}{q}\left(1 - p + p^2\right)$.

3)Donner sans calculs la loi de Z et son espérance.

4)Montrer que les variables aléatoires YZ et $X - 1$ sont égales.

5)Montrer que le couple (Y, Z) admet une covariance et exprimer $cov(Y, Z)$ à l'aide de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$.