Exercice 1 (eml 2015)

Partie I

1)Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

Une densité de X est donnée par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

La fonction de répartition de X est définie par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Enfin, on a : $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

2)En s'aidant de la variable aléatoire X précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f(x) dx \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad \text{car } f \text{ est nulle sur }]-\infty, 0[\\
&= \frac{1}{\lambda} \times 1 \quad \text{car } f \text{ est une densité} \\
&= \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} x f(x) dx \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad \text{car } f \text{ est nulle sur }]-\infty, 0[\\
&= \frac{1}{\lambda} \times E(X) \\
&= \frac{1}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

3)a)Soient $U \hookrightarrow \mathscr{U}\big([0,1[\big)$ et $V = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1-U)$.

D'après le cours, $V \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

b)programme :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def expo(L):
    U=rd.random()
    V=-(1/L)*np.log(1-U)
    return V
```

Partie II

4)a)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout réel $x \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}P(T_n \leq x) &= P\left((X_1 \leq x) \cap ... \cap (X_n \leq x)\right)\\ &= P(X_1 \leq x) \cdots P(X_n \leq x) \quad \text{par indépendance}\\ &= F_{X_1}(x) \cdots F_{X_n}(x)\\ &= \left(1 - e^{-x}\right)^n \quad \text{car } \forall k \in [\![1, n]\!],\ X_k \hookrightarrow \mathscr{E}(1).\end{aligned}$$

b)• Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout réel $x < 0$, on a de même :

$$\begin{aligned}P(T_n \leq x) &= P\left((X_1 \leq x) \cap ... \cap (X_n \leq x)\right)\\ &= F_{X_1}(x) \cdots F_{X_n}(x)\\ &= 0^n \quad \text{car } \forall k \in [\![1, n]\!],\ X_k \hookrightarrow \mathscr{E}(1)\\ &= 0.\end{aligned}$$

La fonction de répartition F_n de T_n est donc définie par :

$$F_n(x) = P(T_n \leq x) = \begin{cases} \left(1 - e^{-x}\right)^n & \text{si } x \geq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

• F_n est continue sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle) et sur $[0, +\infty[$ comme différence et puissance de fonctions continues.

De plus, $\lim\limits_{x \to 0^-} F_n(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0$,

$\lim\limits_{x \to 0^+} F_n(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 - e^{-x}\right)^n = 0$,

$F_n(0) = 0$.

Donc $\lim\limits_{x \to 0^-} F_n(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} F_n(x) = F_n(0)$, ce qui montre la continuité de F_n en 0.

Donc F_n est continue sur $\mathbf{R}$.

• F_n est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle) et sur $[0, +\infty[$ comme différence et puissance de fonctions de classe C^1.

On conclut que T_n est une variable aléatoire à densité.

Une densité f_{T_n} de T_n s'obtient en dérivant F_n aux points où elle est dérivable, en lui donnant une valeur arbitraire positive ou nulle aux points où elle ne l'est pas.

On peut prendre :

$$f_{T_n}(x) = \begin{cases} ne^{-x}\left(1 - e^{-x}\right)^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Donc $f_{T_n}(x) = \begin{cases} ne^{-x}\left(1 - e^{-x}\right)^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, ce qui correspond à $f_n(x)$.

5)a)Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

La variable aléatoire T_n admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|x f_n(x)\right| dx$ converge.

Comme $\forall x < 0,\ f_n(x) = 0$ et que $\forall x \geq 0,\ x f_n(x) \geq 0$, cela se ramène à montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f_n(x) dx$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-e^{-x}\right)=1$ et $\lim\limits_{t\to1}t^{n-1}=1$. Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-e^{-x}\right)^{n-1}=1$.
Donc $xf_n(x)\underset{+\infty}{\sim}nxe^{-x}$.

Or, d'après I)2), l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-x}$ converge donc également $\displaystyle\int_0^{+\infty}nxe^{-x}$.
D'après le critère d'équivalence sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty}xf_n(x)dx$ converge.
On conclut que T_n admet une espérance.

b)• $f_1(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$

Donc $E(T_1)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x)dx=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=1$ d'après I)2).

• $f_2(x)=\begin{cases} 2e^{-x}\left(1-e^{-x}\right) & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$

$$\begin{aligned}\text{Donc } E(T_2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_2(x)dx\\ &=\int_0^{+\infty}2xe^{-x}\left(1-e^{-x}\right)dx\\ &=\int_0^{+\infty}\left(2xe^{-x}-2xe^{-2x}\right)dx\\ &=2\int_0^{+\infty}xe^{-x}-2\int_0^{+\infty}xe^{-2x}dx\\ &=2\times\frac{1}{1}-2\times\frac{1}{2^2}\\ &=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

6)a)Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ et tout réel $x\geq 0$, on a :
d'une part,

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x)-f_n(x)&=(n+1)e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^n-ne^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^{n-1}\\ &=e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^{n-1}\left((n+1)(1-e^{-x})-n\right)\\ &=e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^{n-1}\left(1-(n+1)e^{-x}\right).\end{aligned}$$

d'autre part,
$f'_{n+1}(x)=(n+1)\left(-e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^n+e^{-x}ne^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^{n-1}\right)$.

$$\begin{aligned}\text{donc } -\frac{1}{n+1}f'_{n+1}(x)&=e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^n-e^{-x}ne^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^{n-1}\\ &=e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^{n-1}\left((1-e^{-x})-ne^{-x}\right)\\ &=e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^{n-1}\left(1-(n+1)e^{-x}\right).\end{aligned}$$

On a bien $\forall n\in\mathbf{N}^*,\forall x\in\mathbf{R}_+,\ f_{n+1}(x)-f_n(x)=-\dfrac{1}{n+1}f'_{n+1}(x)$.

b)Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A > 0$.

En utilisant la question 6)a), on a :

$$\int_0^A x\big(f_{n+1}(x) - f_n(x)\big)dx = \int_0^A -\frac{1}{n+1}xf'_{n+1}(x)dx = -\frac{1}{n+1}\int_0^A xf'_{n+1}(x)dx.$$

Effectuons une intégration par parties dans $\displaystyle\int_0^A xf'_{n+1}(x)dx$ en posant :

$u(x) = x \qquad v'(x) = f'_{n+1}(x),$

$u'(x) = 1 \qquad v(x) = f_{n+1}(x).$

u et v sont de classe C^1 sur $[0, A]$. L'IPP est licite et donne :

$$\int_0^A xf'_{n+1}(x)dx = \big[xf_{n+1}(x)\big]_0^A - \int_0^A f_{n+1}(x)dx = Af_{n+1}(A) - \int_0^A f_{n+1}(x)dx.$$

En reportant dans la toute première égalité, on a alors :

$$\int_0^A x\big(f_{n+1}(x) - f_n(x)\big)dx = -\frac{1}{n+1}\left(Af_{n+1}(A) - \int_0^A f_{n+1}(x)dx\right) \quad (*)$$

En reprenant les calculs faits en 5)a), on voit facilement que $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} ne^{-x}$.

Donc $f_{n+1}(A) \underset{+\infty}{\sim} (n+1)e^{-A}$, puis $Af_{n+1}(A) \underset{+\infty}{\sim} (n+1)Ae^{-A}$

D'où $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} Af_{n+1}(A) = \lim_{A\to+\infty}(n+1)Ae^{-A} \lim_{A\to+\infty}(n+1)\frac{A}{e^A} = 0$ par c.c

Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f_{n+1}(x)dx = \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx$, puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx$ converge.

En passant à la limite dans $(*)$, on déduit que :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A x\big(f_{n+1}(x) - f_n(x)\big)dx = -\frac{1}{n+1}\left(0 - \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx\right) = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx.$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\big(f_{n+1}(x) - f_n(x)\big)dx$ converge et

$$\int_0^{+\infty} x\big(f_{n+1}(x) - f_n(x)\big)dx = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx.$$

c)• Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

Par linéarité de l'intégrale, la question précédente donne :

$$\int_0^{+\infty} xf_{n+1}(x)dx - \int_0^{+\infty} xf_n(x)dx = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx.$$

Comme f_n et f_{n+1} sont nulles sur $]-\infty, 0[$, on déduit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf_{n+1}(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} xf_n(x)dx = \frac{1}{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n+1}(x)dx,$$

ou encore $E\left(T_{n+1}\right) - E\left(T_n\right) = \dfrac{1}{n+1} \times 1.$

Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ E\left(T_{n+1}\right) - E\left(T_n\right) = \dfrac{1}{n+1}.$

• Pour tout entier $n \geq 2$ et tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$, on vient de voir que

$$E(T_{k+1}) - E(T_k) = \frac{1}{k+1}.$$

En sommant ces égalités pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on obtient :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \big(E(T_{k+1}) - E(T_k)\big) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$
Puis, par télescopage de la somme de gauche :
$\displaystyle E(T_n) - E(T_1) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$
D'après la question 5)b), on a : $E(T_1) = 1$.
Donc $\displaystyle E(T_n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$
On peut réindéxer les termes de la somme, ce qui donne :

$$E(T_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Partie III

7)L'événement $(N = 0)$ est réalisé si et seulement si toutes les variables aléatoires X_n prennent une valeur inférieure ou égal à a.
Donc $\displaystyle (N = 0) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_k \leq a).$
On déduit :

$$\begin{aligned}
P(N = 0) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_k \leq a)\right) \\
&= \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leq a)\right) \quad \text{grâce au corollaire du thm de la limite monotone} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} P\big(X_k \leq a\big) \quad \text{par indépendance des } X_k \\
&= \lim_{n \to +\infty} \big(1 - e^{-a}\big)^n \quad \text{grâce à I)1).}
\end{aligned}$$

Or, $a > 0$ donc $0 < e^{-a} < 1$, puis $0 < 1 - e^{-a} < 1$. Donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (1 - e^{-a})^n = 0$.

On conclut que $P(N = 0) = 0$.

8)Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
L'événement $(N = n)$ est réalisé si et seulement si les événements $(X_1 \leq a)$, ..., $(X_{n-1} \leq a)$ et $(X_n > a)$ sont réalisés.
Ainsi, $(N = n) = (X_1 \leq a) \cap ... \cap (X_{n-1} \leq a) \cap (X_n > a)$.

En passant à la probabilité et compte tenu de l'indépendance des variables aléaoires X_1, ..., X_n, on a :

$$\begin{aligned}
P(N=n) &= P(X_1 \leq a) \times \cdots \times P(X_{n-1} \leq a) \times P(X_n > a) \\
&= \left(1-e^{-a}\right) \times \cdots \times \left(1-e^{-a}\right) \times e^{-a} \quad \text{grâce à I)1)} \\
&= \left(1-e^{-a}\right)^{n-1} e^{-a}.
\end{aligned}$$

9)Le plus simple est de remarquer que $N \hookrightarrow \mathscr{G}\left(e^{-a}\right)$.

On a donc $E(N) = \dfrac{1}{e^{-a}} = e^a$ et $V(N) = \dfrac{1-e^{-a}}{\left(e^{-a}\right)^2} = \left(1-e^{-a}\right)e^{2a} = e^{2a} - e^a$.

10)La formule des probabilités totales pour le sce $\big((N=0),(N\neq 0)\big)$ s'écrit :

$P(Z \leq a) = P\big((Z \leq a) \cap (N=0)\big) + P\big((Z \leq a) \cap (N \neq 0)\big) \quad (*)$

Or, $(Z \leq a) \cap (N=0) \subset (N=0)$ donc $P\big((Z \leq a) \cap (N=0)\big) \leq P(N=0)$.

Comme $P(N=0)=0$, on a alors $P\big((Z \leq a) \cap (N=0)\big) = 0$.

En reportant dans $(*)$, on a :

$$\begin{aligned}
P(Z \leq a) &= P\big((Z \leq a) \cap (N \neq 0)\big) \\
&= P_{(N\neq 0)}(Z \leq a) P(N \neq 0) \\
&= P_{(N\neq 0)}(Z \leq a) \times 1 \\
&= P_{(N\neq 0)}(X_N \leq a) \quad \text{par définition de } Z \\
&= 0.
\end{aligned}$$

En effet, par construction de N, lorsque l'événement $(N \neq 0)$ est réalisé, l'événement $(X_N > a)$ est certain.

Exercice 2 (eml 2015)

Partie I :

1)φ est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme quotient et différence de fonctions dérivables.
$\forall x \in \mathbf{R},\ \varphi'(x) = 2xe^x + x^2e^x = x(x+2)e^x$, du signe de $x(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	-1	$\nearrow$	$4e^{-2}-1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = -1$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x = +\infty$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

2)$e^x = \dfrac{1}{x^2}$ et $x > 0 \Longleftrightarrow x^2e^x = 1$ et $x > 0 \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0$ et $x > 0$.
φ est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\varphi\big(]0,+\infty[\big) =]-1,+\infty[$.
$0 \in]-1,+\infty[$ admet donc un unique antécédent $\alpha \in]0,+\infty[$ par φ.
Donc l'équation $e^x = \dfrac{1}{x^2}$ admet une unique solution $\alpha > 0$.
De plus, $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{e^{1/2}}{4} - 1 < 0$ car $e^{1/2} < 3^{1/2} = \sqrt{3} < 2$,
$\varphi(\alpha) = 0$ et $\varphi(1) = e - 1 > 0$.
Donc $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) < \varphi(\alpha) < \varphi(1)$, puis $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$ par stricte croissance de φ.

Partie II :

3)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_n \geq 1$ ».
$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $u_0 \geq 1$ ». Elle est vraie car $u_0 = 1$.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 1$ donc $u_n^3 \geq 1$ et $e^{u_n} \geq e > 1$.
Par produit, $u_n^3e^{u_n} \geq 1$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq 1$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geq 1$.

4)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_{n+1} \geq u_n$ ».
$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $u_1 \geq u_0$ ». Elle est vraie car $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) = e$.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} \geq u_n$ donc $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ par stricte croissance de f sur $\mathbf{R}_+$ (en effet, $\forall x \geq 0,\ f'(x) = (x^3 + 3x^2)e^x \geq 0$).
Donc $u_{n+2} \geq u_{n+1}$, ce qui établit que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} \geq u_n$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.

5)La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant croissante, elle admet une limite quand $n+\infty$.
Cette limite peut être finie ou valoir $+\infty$.
Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \in \mathbf{R}$.
La question 3) donne par passage à la limite : $L \geq 1$.
f est continue sur $\mathbf{R}$ donc continue en L.
D'après le théorème du point fixe, L est un point fixe de f.
Or, $f(x)=x$ et $x>0 \Longleftrightarrow x^3e^x = x$ et $x>0 \Longleftrightarrow x\varphi(x)=0$ et $x>0$
$\Longleftrightarrow \varphi(x)=0$ et $x>0 \Longleftrightarrow x=\alpha$.
Donc $L=\alpha<1$, ce qui contredit $L\geq 1$.
On conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Partie III :

6)$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ e^n\geq 1$ donc $f(n)\geq n^3$, puis $\dfrac{1}{f(n)} \leq \dfrac{1}{n^3}$.
La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^3}$ converge car c'est une série de Riemann de paramètre $3>1$.
Donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{f(n)}$ converge, d'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs.

7)$\forall n\in\mathbf{N}^*$, $\left|S-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{f(k)}\right| = \left|\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{f(k)} - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{f(k)}\right| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{f(k)}\right| = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{f(k)}$,
(valeur absolue inutile, la somme est positive car formée de termes positifs).
De plus, $\forall k\in\mathbf{N}^*, k^3\geq 1$ donc $f(k)\geq e^k$, puis $\dfrac{1}{f(k)} \leq \left(\dfrac{1}{e}\right)^k \quad (*)$
La série $\sum\limits_{k\geq 1}\left(\dfrac{1}{e}\right)^k$ converge car elle est géométrique de paramètre $\dfrac{1}{e}\in\,]-1,1[$.
$(*)$ donne alors : $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{f(k)} \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{e}\right)^k$.
Le changement d'indice $j=k-n-1$ donne enfin :

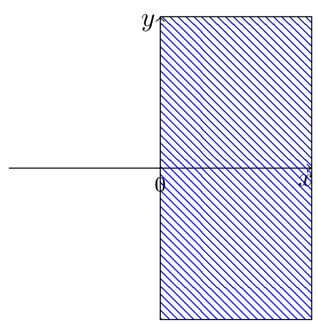
$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^k &= \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{j+n+1}\\
&= \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{j}\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\\
&= \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{j}\\
&= \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\frac{1}{1-\frac{1}{e}}\\
&= \frac{1}{(e-1)e^n}.
\end{aligned}$$

8)L'inégalité précédente montre que dès que $\frac{1}{(e-1)e^n} \leq 10^{-4}$, alors $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)}$ est une valeur approchée de S à 10^{-4} près.
D'où la fonction Python ci-dessous :

```
import numpy as np
def valeur():
    n=1
    s=1/np.exp(1)
    while 1/((np.exp(1)-1)*np.exp(n))>10**-4:
        n=n+1
        s=s+1/(n**3*np.exp(n))
    return s
```

Partie IV :

9)$U =]0,+\infty[\times \mathbf{R} = \{(x,y), x>0 \text{ et } y \in \mathbf{R}\}$ est le demi-plan hachuré ci-dessous :



10)$(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y^2$ sont polynomiales donc de classe C^1 sur U,
$(x,y) \mapsto e^x$ et $(x,y) \mapsto e^y$ sont de classe C^1 sur U, comme fonctions usuelles.
g est donc de classe C^1 sur U comme somme, inverse et produit de fonctions C^1.
Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 données par :
$\partial_1 g(x,y) = -\frac{1}{x^2} + e^x$ et $\partial_2 g(x,y) = -(2y+y^2)e^y$.
11)Les points critiques de g sont les solutions sur U du système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_1 g(x,y) & = & 0 \\ \partial_2 g(x,y) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} -\frac{1}{x^2} + e^x & = & 0 \\ \\ -(2y+y^2)e^y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} e^x = 1/x^2 \\ y(2+y) = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \alpha \quad \text{grâce à la question 2)} \\ y = 0 \text{ ou } y = -2 \end{array}\right.$$

Les points critiques de g sont donc $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$ et ils appartiennent bien à U.

12)g est de classe C^2 sur U comme somme, inverse et produit de fonctions C^2.
Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 données par :

$\partial_{1,1}g(x,y) = \dfrac{2}{x^3} + e^x$,

$\partial_{1,2}g(x,y) = \partial_{1,2}g(x,y) = 0$,

$\partial_{2,2}g(x,y) = -(2+2y)e^y - (2y+y^2)e^y = -(2+4y+y^2)e^y$.

La matrice hessienne de g en $(\alpha, 0)$ vaut : $\begin{pmatrix} \dfrac{2}{\alpha^3} + e^\alpha & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ses valeurs propres sont $\dfrac{2}{\alpha^3} + e^\alpha > 0$ et -2.

Elles sont non nulles et de signes contraires. Donc g n'admet pas d'extrémum local en $(\alpha, 0)$ (c'est un col).

13)La matrice hessienne de g en $(\alpha, -2)$ vaut : $\begin{pmatrix} \dfrac{2}{\alpha^3} + e^\alpha & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$.

Ses valeurs propres sont $\dfrac{2}{\alpha^3} + e^\alpha > 0$ et $2e^{-2} > 0$.

Elles sont strictement positives. Donc g admet un minimum local en $(\alpha, -2)$.

14)Si g admet un extrémum global sur U, ce ne peut être qu'en $(\alpha, -2)$.
Supposons donc que g admette un minimum global en $(\alpha, -2)$.
Alors, $\forall (x,y) \in U^2,\ g(x,y) \geq g(\alpha, -2)$.

On a en particulier pour $x = 1$: $\forall y \in \mathbf{R},\ g(1,y) \geq g(\alpha,-2) \quad (*)$

Or, $\lim\limits_{y \to +\infty} g(1,y) = \lim\limits_{y \to +\infty} 1 + e - y^2 e^y = -\infty$, ce qui contredit $(*)$.

Ainsi, g n'a pas d'extrémum global sur U.

Exercice 3 (eml 2015)

1)a)Supposons que f est bijectif.
De l'égalité $f\circ(f^2+i)=\theta$, on obtient en composant (à gauche) par f^{-1} :
$\underbrace{f^{-1}\circ f}_{=i}\circ(f^2+i)=f^{-1}\circ\theta$, c'est-à-dire $f^2+i=\theta$, ce qui contredit l'énoncé.

Donc f n'est pas bijectif.

b)Comme f n'est pas bijectif, alors 0 est valeur propre de f (c'est du cours).
Le sous-espace propre de f associé à 0 ($= Kerf$) est non-nul. Il existe donc un vecteur $u\neq 0_E$ tel que$f(u)=0_E$ (autrement dit u est un vecteur propre de u associé à 0).

2)Soit P le polynôme $P(X)=X(X^2+1)$.
Par énoncé, on a : $f\circ(f^2+i)=\theta$, c'est-à-dire $P(f)=\theta$, ce qui prouve que P est un polynôme annulateur de f.
De plus, $P(x)=0\iff x=0$ ou $\underbrace{x^2+1=0}_{\text{impossible}}\iff x=0$.

Enfin, d'après le cours, $sp(f)\subset\{\text{racines de } P\}$. Donc $sp(f)\subset\{0\}$, ce qui prouve que 0 est la seule valeur propre possible de f.

Compte tenu de la question 1)b), on peut donc conclure que $sp(f)=\{0\}$.

3)Supposons f diagonalisable. Alors, il existe une base (e_1,e_2,e_3) de E formée de vecteurs propres de f.
Comme 0 est l'unique valeur propre de f, ces vecteurs e_1, e_2 et e_3 sont tous des vecteurs propres de f associés à 0.
On a donc $\forall i\in[\![1,3]\!],\ f(e_i)=0$.
Pour tout $u=\lambda_1e_1+\lambda_1e_2+\lambda_1e_3$ vecteur de E, on alors par linéarité de f :
$f(u)=\lambda_1\underbrace{f(e_1)}_{=0}+\lambda_1\underbrace{f(e_2)}_{=0}+\lambda_1\underbrace{f(e_3)}_{=0}=0$.

Donc $f=\theta$, ce qui contredit l'énoncé.

On conclut que f n'est pas diagonalisable.

4)• On fait une démonstration par l'absurde, comme pour la question 1)a).
Supposons que f^2+i est bijectif.
De l'égalité $f\circ(f^2+i)=\theta$, on obtient en composant (à droite) par $(f^2+i)^{-1}$:
$f\circ\underbrace{(f^2+i)\circ(f^2+i)^{-1}}_{=i}=\theta\circ(f^2+i)^{-1}$, c'est-à-dire $f=\theta$, ce qui contredit l'énoncé.

Donc f^2+i n'est pas bijectif.

• Comme f^2+i n'est pas bijectif, il n'est pas injectif. Son noyau est non nul.
Il existe donc $v\neq 0$ tel que $(f^2+i)(v)=0_E$, c'est-à-dire $f^2(v)+v=0_E$ ou encore $f^2(v)=-v$.

5)$f(v_3)=f\big(f(v_2)\big)=f^2(v_2)=-v_2$ d'après la question précédente.

6)a)• Montrons que $\mathscr{B}$ est libre.
Soient λ_1, λ_2 et λ_3 des réels tels que $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3=0_E \quad (*)$
En appliquant f dans chaque membre et compte tenu de la linéarité de f, on a :

$\lambda_1 \underbrace{f(v_1)}_{=0_E} + \lambda_2 \underbrace{f(v_2)}_{=v_3} + \lambda_3 \underbrace{f(v_3)}_{=-v_2} = 0_E$, c'est-à-dire :

$$\lambda_2 v_3 - \lambda_3 v_2 = 0_E \quad (L_1)$$

En appliquant f dans chaque membre et compte tenu de la linéarité de f, on a :
$\lambda_2 \underbrace{f(v_3)}_{=-v_2} - \lambda_3 \underbrace{f(v_2)}_{=v_3} = 0_E$, c'est-à-dire :

$$-\lambda_2 v_2 - \lambda_3 v_3 = 0_E \quad (L_2)$$

$\lambda_3 L_1 + \lambda_2 L_2$ donne alors : $-\underbrace{(\lambda_3^2 + \lambda_2^2)}_{\geq 0} v_2 = 0_E$.

Comme $v_2 \neq 0_E$, on a nécessairement $\lambda_3^2 + \lambda_2^2 = 0$, puis $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

En reportant ces valeurs dans l'égalité $(*)$, on a : $\lambda_1 v_1 = 0_E$, puis $\lambda_1 = 0$, puisque $v_1 \neq 0_E$.

On a établi que $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3,\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$\mathscr{B}$ est donc une famille libre de E.

Son cardinal coïncide avec la dimension de E. C'est donc une base de E.

b)D'après les questions précédentes, on a :

$f(v_1) = 0 = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3$,

$f(v_2) = v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3$,

$f(v_3) = -v_2 = 0v_1 - 1v_2 + 0v_3$.

$$\text{Donc } C = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7)Pour tous réels a, b et c, on a :

$aA + bB + cC = 0$

$\Longleftrightarrow a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow a = b = c = 0$.

Donc (A, B, C) est une famille libre.

Par ailleurs, c'est une famille génératrice de $\mathscr{F}$ par construction, c'est donc finalement une base de $\mathscr{F}$.

$$\text{Ainsi, } dim\mathscr{F} = 3.$$

8)Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$CM = MC$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g & -h & -i \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ 0 & f & -e \\ 0 & i & -h \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} c & = 0 \\ b & = 0 \\ g & = 0 \\ f & = -h \\ i & = e \\ d & = 0 \end{cases}$$

Donc $\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R}) \mid CM = MC\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \mid b = c = d = g = 0, f = -h, i = e \right\}.$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & -h \\ 0 & h & e \end{pmatrix}, (a, e, h) \in \mathbf{R}^3 \right\}.$$

$= \left\{ aA + eB + hC, (a, e, h) \in \mathbf{R}^3 \right\}$

$= \mathrm{Vect}\,(A, B, C)$

$= \mathscr{F}.$

9)a)Pour tout $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, on a :

$$(aA + bB + cC)^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - c^2 & -2bc \\ 0 & 2bc & b^2 - c^2 \end{pmatrix}.$$

b)Etant donnée la question précédente, on a intérêt à chercher M sous la forme $M = aA + bB + cC$.

On a alors : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - c^2 & -2bc \\ 0 & 2bc & b^2 - c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 & = 4 \\ b^2 - c^2 & = 5 \\ 2bc & = 12 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 & = 4 \\ b^2 - c^2 & = 5 \\ bc & = 6 \end{cases}$$

La troisième équation montre que $b \neq 0$. On peut alors multiplier la deuxième équation par $b^2 \neq 0$, ce qui donne :

$$\begin{cases} a = \pm 2 \\ b^4 - (bc)^2 = 5b^2 \\ bc = 6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \pm 2 \\ b^4 - 5b^2 - 36 = 0 \\ bc = 6 \end{cases}$$

En posant $x = b^2$, la deuxième équation se ramène à $x^2 - 5x - 36 = 0$ de racines -4 et 9.

Donc $b^4 - 5b^2 - 36 = 0 \iff \underbrace{b^2 = -4}_{\text{impossible}}$ ou $b^2 = 9 \iff b = \pm 3$.

Plusieurs solutions sont donc possibles.

En prenant par exemple $a = 2$, $b = 3$ et $c = 2$, on voit que $M = 2A + 3B + 2C$ est solution du problème.

10)La matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\begin{aligned} C^2 - I &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

C'est une matrice inversible car elle est diagonale avec tous ses coefficients diagonaux non nuls.

Donc g est bijectif.

La matrice de g^{-1} dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\left(C^2 - I\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = -I - \frac{1}{2}C^2.$$

$$\text{Donc } g^{-1} = -i - \frac{1}{2}f^2.$$