# EDHEC 2019 Voie E

## Exercice 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont $A$ est la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $Id$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est $I$.

1. (a) Déterminer $(A - I)^2$.
   (b) En déduire que $A$ est inversible et écrire $A^{-1}$ comme combinaison linéaire de $I$ et $A$.
2. On pose $A = N + I$.
   (a) Exprimer pour tout entier naturel $n$, la matrice $A^n$ comme combinaison linéaire de $I$ et $N$, puis l'écrire comme combinaison linéaire de $I$ et $A$.
   (b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.
3. (a) Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de $A$.
   (b) En déduire si $A$ est ou n'est pas diagonalisable.
4. On pose $u_1 = (f - Id)(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
   (a) Montrer que le rang de $f - Id$ est égal à 1.
   (b) Justifier que $(u_1, u_2)$ est une base de $Ker(f - Id)$.
5. (a) Montrer que la famille $(u_1, u_2, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice $T$ de $f$ dans cette même base.
6. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de $P$ puis écrire une relation existant entre les matrices $A$, $T$, $P$ et $P^{-1}$.
7. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout $(i, j)$ de $[\![1, 3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i$-ème ligne et de la $j$-ème colonne qui vaut 1.
   (a) Montrer que l'ensemble $E$ des matrices $M$ qui commutent avec $T$, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de $E$ est égale à 5.
   (b) Soit $N$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :
   $$NA = AN \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$
   (c) En déduire que l'ensemble $F$ des matrices qui commutent avec $A$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille :
   $(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1})$.

## Exercice 2

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches, dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1.
On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque $i$ de $[\![1, n-1]\!]$, on note :
$B_i$ l'événement : « le $i$-ème tirage donne une boule blanche », et on pose $\overline{B_i} = N_i$.

On note $X$ la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable $X$.
2. (a) Pour tout $i$ de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que $P_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.
   (b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $P(X=k)$, pour tout $k$ de $X(\Omega)$.
   (c) Reconnaître la loi de $X$ et donner son espérance et sa variance.
3. On note $Y$ la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.
   (a) Pour tout $k$ de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :
   $$P\Big([X=k]\cap[Y=0]\Big) = \frac{n-k}{n(n-1)}.$$
   (b) En déduire $P(Y=0)$.
   (c) Reconnaître la loi de $Y$ et donner son espérance et sa variance.
4. Simulation informatique.
   On rappelle que si a et b sont des entiers, la commande `randint(a,b)` du module `numpy.random` représente un entier aléatoire entre a et b-1.
   (a) Compléter le script `Python` suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et affiche la valeur prise par $X$.
   On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre `nB+1`, où `nB` désigne le nombre de boules blanches.

```
import numpy.random as rd
n=int(input("entrer n"))
nB=n-1
X=1
u=rd.randint(1,nB+2)
while u<nB+1:
    nB=.......
    u=rd.randint(1,......)
    X=........
print("la boule noire est apparue au tirage",X)
```

   (b) Compléter les lignes ajoutées au script précédent afin que le script renvoie et affiche, en plus de celle prise par $X$, la valeur prise par $Y$.

```python
import numpy.random as rd
n=int(input("entrer n"))
nB=n-1
X=1
Y=.....
u=rd.randint(1,nB+2)
while u<nB+1:
    if u==1 :
        Y=.....
    nB=......
    u=rd.randint(1,.....)
    X=.......
print("la boule noire est apparue au tirage",X)
print("la valeur de Y est",Y)
```

## Exercice 3

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(1 - t^2\right)^n dt$.
On a donc, en particulier, $u_0 = 1$.

1. Déterminer $u_1$ et $u_2$.
2. (a) Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.
3. On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite $(u_n)$.
   (a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$, où $\sigma$ est un réel strictement positif.
   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt$, puis celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt$.
   (c) Montrer que, pour tout réel $t$, on a : $e^{-t^2} \geqslant 1 - t^2$.
   (d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$, puis donner la limite de la suite $(u_n)$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n dt$, puis montrer que $u_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   Que peut-on déduire en ce qui concerne la série de terme général $u_n$ ?
5. (a) Établir, grâce à une intégration par parties :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1})$$
   (b) En déduire l'égalité :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$
   (c) On admet l'équivalent $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$.
   En écrivant $u_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$, montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.
6. Informatique
   (a) Ecrire une fonction Python d'en-tête `def fact(n):` prenant un entier naturel $n$ comme paramètre et renvoyant la valeur de $n$!
   (b) A l'aide de cette fonction, écrire un programme Python calculant et d'affichant la valeur de $u_n$ pour un entier naturel $n$ entré par l'utilisateur.

## Problème

### Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire $X$

Dans cette exercice, $\theta$ désigne un réel élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

1. Montrer que $f$ est une densité.

*On considère dans la suite une variable aléatoire $X$ de densité $f$ et on note $F$ sa fonction de répartition.*

2. Montrer que $X$ possède une espérance et une variance et les déterminer.
3. Déterminer, pour tout réel $x$, l'expression de $F(x)$ en fonction de $x$ et $\theta$.
4. (a) Montrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ possède une seule solution, notée $M_e$, que l'on déterminera.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $2^x(1-x) \leqslant 1$.
   (c) Comparer $E(X)$ et $M_e$.
5. Soit $a$ un réel supérieur ou égal à 1 et $b$ un réel strictement positif.
   (a) Montrer que $P_{(X>a)}(X > a+b) = \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^{1/\theta}$.
   (b) Déterminer la limite de cette quantité lorsque $a$ tend vers $+\infty$. Interpréter cette dernière valeur si l'on admet que la variable $X$ représente la durée de vie d'un certain appareil.

### Partie 2 : simulation de $X$

6. On pose $Y = \ln(X)$ et on admet que $Y$ est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que $X$. On note $G$ sa fonction de répartition.
   (a) Pour tout réel $x$, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction $F$.
   (b) En déduire que $Y$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
7. On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$. Écrire des commandes `Scilab` utilisant `grand` et permettant de simuler $X$.

### Partie 3 : simulation de $X$

On suppose dans la suite que le paramètre $\theta$ est inconnu et on souhaite en trouver une estimation ponctuelle puis par intervalle de confiance.
On considère pour cela $n$ variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que $Y$.

8. On pose $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   (a) Justifier que $T_n$ est un estimateur de $\theta$.
   (b) $T_n$ est-il un estimateur sans biais de $\theta$ ?
   (c) Calculer le risque quadratique de $T_n$ en tant qu'estimateur de $\theta$. $T_n$ est-il un estimateur convergent de $\theta$ ?
9. (a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable $T_n$.
   (b) Établir l'inégalité :
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad P\Big(\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]\Big) \geqslant 1 - \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$$
   (c) En utilisant le fait que $\theta \leqslant \dfrac{1}{2}$, déterminer un intervalle de confiance pour $\theta$ au niveau de confiance 90% lorsqu'on choisit $n = 1000$.