TD6 - compléments sur les suites

Exercice 1 ★ ★ ☆☆
Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $U_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f : x \mapsto x - x^2$.

1)Etudier les variations de $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

2)Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbf{R}$.

3)On suppose dans cette question que $U_0 = 1/2$.

a)Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$.

b)Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

4)On suppose dans cette question que $U_0 = -1$.

a)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n \leq -1$.

b)Montrer par l'absurde que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.

Exercice 2 ★ ★ ☆☆
Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f : x \mapsto \ln(1 + x)$.

1)Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n$ existe et $U_n \geq 0$.

2)Etudier les variations de f sur $]-1, +\infty[$.

3)Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+1} \leq U_n$.

4)a)Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

b)Etudier les variations de $g : x \mapsto f(x) - x$. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution que l'on déterminera.

c)Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 3 ★ ★ ☆☆
Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $U_0 = 3/2$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f : x \mapsto x^2 - 2x + 2$.

1)Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbf{R}$.

2)En déduire que $\forall x \in [1, 2],\ 1 \leq f(x) \leq 2$.

3)Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ 1 \leq U_n \leq 2$.

4)a)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+1} - U_n = (U_n - 2)(U_n - 1)$.

b)Conclure quant aux variations de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$.

c)Montrer que $(U_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 4 ★ ☆ ☆☆
Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n = \dfrac{3^n + 4^n}{5^n - 2^n}$.

1)Montrer que $3^n + 4^n \underset{+\infty}{\sim} 4^n$ et $5^n - 2^n \underset{+\infty}{\sim} 5^n$.

2)En déduire un équivalent simple de U_n, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 5 ★ ★ ☆☆
Répondre par vrai ou faux (en justifiant !)

1)$e^n \underset{+\infty}{=} o\left(e^{2n}\right)$ 2)$\ln(n) \underset{+\infty}{=} o\left(\ln(n^2 + n)\right)$ 3)$e^n \underset{+\infty}{=} o\left(n^n\right)$.

Exercice 6 ★ ★ ☆☆

1)Déterminer un équivalent simple de $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ et $\binom{n}{3}$.

2)Plus généralement, montrer que $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $\binom{n}{k} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$.

Exercice 7 ★ ☆ ☆☆

Déterminer un équivalent simple des suites ci-dessous :

1)$U_n = 5n^2 - (\ln n)^3$ 2)$V_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^3 - 2n + 1}}$ 3)$W_n = e^n - n^3$.

Exercice 8 ★ ★ ☆☆

1)Montrer par récurrence que $\forall n \geq 2,\ n! \leq n^{n-1}$.

2)En déduire que $n! \underset{+\infty}{=} o\left(n^n\right)$.

Exercice 9 ★ ★ ★☆

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie par $\forall x \in [0,1]\,,\ f_n(x) = x^n + x^2 + x - 1$.

1)Montrer que f_n admet une unique racine $x_n \in [0,1]$.

2)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in [0,1]\,, f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$.

3)En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante, puis convergente.

4)On note $L = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

a)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 \leq x_n \leq \dfrac{3}{4}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n$.

b)Conclure que $L^2 + L - 1 = 0$, puis déterminer L.

Exercice 10 ★ ★ ☆☆

1)Montrer que $\forall n \geq 2, \forall k \in [\![0, n-2]\!],\ \dfrac{k!}{n!} \leq \dfrac{1}{(n-1)n}$.

2)En déduire que $\forall n \geq 2,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!}$.

3)On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$ Déterminer un équivalent simple de S_n en $+\infty$.

Exercice 11★ ★ ★☆

Montrer que $(\ln n)^n \underset{+\infty}{=} o\left((1 + \ln n)^n\right)$.

Exercice 12 (extrait essec 2012) ★ ★ ★☆

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ des constantes réelles.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ les suites définies par :

$a_n = \ln\left(1 + \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}} + \dfrac{\beta}{n}\right) + \ln\left(1 - \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}} + \dfrac{\beta}{n}\right)$ et $b_n = \ln\left(1 + \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}} + \dfrac{\beta}{n}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}} + \dfrac{\beta}{n}\right)$.

1)Déterminer le DL en 0 à l'ordre 2 des fonctions $f : x \mapsto \ln\left(1 + \alpha x + \beta x^2\right)$ et $g : x \mapsto \ln\left(1 - \alpha x + \beta x^2\right)$.

2)En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n = 2\beta - \alpha^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} b_n = 2\alpha$.

3)Proposer un équivalent simple de a_n et de b_n.

Indications / Réponses

Exercice 1

3)b)Théorème de la limite monotone, puis théorème du point fixe.

4)a)Récurrence inutile ! Utiliser que $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

Exercice 2

4)a)Théorème de la limite monotone.

4)c)Théorème du point fixe.

Exercice 3

4)c)Théorème de la limite monotone, puis théorème du point fixe.

Exercice 4

1)Revenir à la définition de suites équivalentes, puis utiliser le THM2.

2)Utiliser P4, puis P1.

Exercice 5

Revenir à la définition.

1)Vrai 2)Faux 3)Vrai.

Exercice 6

1)Vérifier que $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, puis utiliser P3.

2)Vérifier que $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, puis trouver un équivalent simple du numérateur.

Exercice 7

1)Par croissances comparées, on montre que $U_n \underset{+\infty}{\sim} 5n^2$.

2)En utilisant P3 et P4, on montre que $V_n \underset{+\infty}{\sim} 1/\sqrt{n}$.

3)Par croissances comparées, on montre que $W_n \underset{+\infty}{\sim} e^n$.

Exercice 8

1)Pour l'hérédité, utiliser l'égalité très classique : $(n+1)! = n!(n+1)$.

2)Revenir à la définition.

Exercice 9

1)Utiliser le théorème de bijection.

3)Pour établir la croissance de la suite, utiliser la croissance de f_n et le fait que $f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.

4)a)Pour établir l'encadrement, le calcul de $f_n(0)$ et $f_n\left(\frac{3}{4}\right)$ est indispensable !

4)b)Pour établir l'égalité, faire un passage à la limite dans l'égalité $f_n(x_n) = 0$.

On trouve $L = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Exercice 12

1)Utiliser la formule de Taylor-Young en 0 (voir chapitre 5).

2)Utiliser les DL trouvés en faisant la substitution $x \to \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

3)$a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\beta - \alpha^2}{n}$ à la condition que $2\beta - \alpha^2 \neq 0$.

(si $2\beta - \alpha^2 = 0$, on ne sait pas à notre niveau trouver un équivalent de a_n).

$b_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\alpha}{\sqrt{n}}$.