TD13 - variables aléatoires

Exercice 1 ★ ☆ ☆☆
Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire.
On effectue dans l'urne des tirages successifs d'une boule selon le mode suivant :
− si elle est noire, on arrête l'expérience,
− si elle est blanche, on la remet dans l'urne en ajoutant une boule blanche supplémentaire dans l'urne.
On réitère l'expérience et les tirages jusqu'à l'obtention de la boule noire.
Soit X la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la boule noire.

1)Préciser $X(\Omega)$, puis calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X=3)$.

2)On admet que $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(X=k)=\dfrac{1}{k(k+1)}$.

a)Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)=1$.

b)X admet-elle une espérance ?

Exercice 2 ★ ★ ☆☆
Soit X la variable aléatoire définie par $X(\Omega)=\mathbf{N}$ et $\forall k\in\mathbf{N},\ P(X=k)=\dfrac{2}{3^{k+1}}$.

1)Montrer que la variable aléatoire $Y=X+1$ suit une loi connue.

2)En déduire que X admet une espérance et une variance qu'on calculera.

Exercice 3 ★ ☆ ☆☆
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket -1,2\rrbracket)$ et soit $Y=X^2+1$.

1)Préciser $P(X=k)$ pour tout $k\in\llbracket -1,2\rrbracket$.

2)Déterminer la loi de Y.

3)Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

4)Calculer $E(Y)$ de plusieurs façons différentes.

Exercice 4 ★ ☆ ☆☆
On lance 3 fois une pièce de monnaie pour laquelle $P(pile)=1/3$ et $P(face)=2/3$.
On note X = nombre de piles obtenus et Y = nombre de faces obtenus.

1)a)Reconnaître la loi de X et de Y. En préciser les paramètres, puis donner leur espérance et leur variance.

b)Quelle est la loi de $Z=X+Y$? Que vaut $E(Z)$?

2)On lance la pièce jusqu'à ce qu'elle fasse pile.
On note T le rang d'obtention du pile.
Reconnaître la loi de T. En préciser le paramètre, l'espérance et la variance.

Exercice 5 ★ ★ ★☆
$n\geq 2$ est un entier. p et q désignent des réels tels que $0<p<1$ et $q=1-p$.

Un joueur dispose d'un stock de n flèches. Avec ces flèches, il doit éclater un ballon.
A chaque tir, la probabilité que le joueur éclate le ballon est p.
Le joueur lance ses flèches une par une, mais s'arrête si le ballon éclate.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de flèches utilisées par le joueur.

1)Préciser $X(\Omega)$.

2)Calculer $P(X = k)$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.

3)Calculer $P(X = n)$.

4)a)Préciser la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k$ en fonction de n et q.

b)En déduire que $E(X) = \dfrac{1-q^n}{p}$. Interpréter ce résultat quand $n \to +\infty$.

<u>Exercice 6</u> ★ ★ ☆☆ (eml 2011)
$n \geq 2$ est un entier. p et q désignent des réels tels que $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$.
n joueurs visent une cible en effectuant chacun deux tirs.
A chaque tir, la probabilité qu'un joueur atteigne la cible est p.
Les tirs sont indépendants des autres.
On définit les variables aléatoires suivantes :
X = nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir,
Z = nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois sur les deux tirs,
$Y = Z - X$.

1)Déterminer la loi de X. Rappeler son espérance et sa variance.

2)Montrer que Z suit une loi binômiale. Donner son espérance et sa variance.

3)a)Que représente Y ? Déterminer la loi de Y.

b)X et Y sont-elles indépendantes ?

<u>Exercice 7</u> ★ ★ ☆☆ (eml 2004)
Une urne contient des boules blanches, rouges et vertes en proportions respectives b, r et v (avec $0 < b < 1$, $0 < r < 1$, $0 < v < 1$ et $b + r + v = 1$).
On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise dans cette urne.
On s'arrête au premier changement de couleur.
Pour tout entier $i \geq 1$, on considère les événements :
B_i = « la i-ème boule tirée est blanche »,
R_i = « la i-ème boule tirée est rouge »,
V_i = « la i-ème boule tirée est verte ».

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Par exemple, si l'on obtient VVB, alors $X = 3$.

1)Préciser $X(\Omega)$.

2)Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$P(X = k) = (1-b)b^{k-1} + (1-r)r^{k-1} + (1-v)v^{k-1}.$$

3)Montrer que X admet une espérance et que

$$E(X) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2.$$

Exercice 8 ★ ★ ★★ (essec 2009)

Présentation : on est en voiture au départ d'une rue infiniment longue et à sens unique. On doit se rendre à un point d'arrivée de cette rue, situé à une certaine distance du point de départ et on veut se garer le plus près possible de l'arrivée. À partir d'où doit-on commencer à accepter une place libre ?

Mise en place : au départ on est au numéro 0 de la rue. Pour chaque entier naturel n, il y a une place de parking au numéro n, qui peut être libre avec la probabilité $p \in]0,1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations de places se font indépendamment les unes des autres. L'arrivée est au numéro d.

Stratégie :on se donne $s \in [\![0,d]\!]$, et on conduit sans s'arrêter jusqu'au numéro s de la rue. On accepte alors la première place libre à partir du numéro s (inclus). On note X le numéro de la place trouvée par cette méthode. La distance à l'arrivée est $|X-d|$ et l'espérance $D_s = E\big(|X-d|\big)$ est la distance moyenne à l'arrivée.

1)Loi de X

a)Déterminer $X(\Omega)$.

b)Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on note A_k l'événement « la place au numéro k est occupée ». Pour $n \in X(\Omega)$, exprimer l'événement $(X = n)$ en fonction des événements A_k.

c)Déterminer la loi de X.

d)Vérifier que $X - s + 1$ suit une loi géométrique.

e)En déduire l'espérance de X.

2)Calcul de $D_s = E\big(|X-d|\big)$.

a)Montrer que la variable aléatoire $|X-d|$ admet une espérance.

b)Établir : $D_s = \sum\limits_{n=s}^{+\infty}(n-d)P(X=n) - 2\sum\limits_{n=s}^{d}(n-d)P(X=n)$.

c)Soit $x \in \mathbf{R}\setminus\{1\}$, donner la valeur de la somme $\sum\limits_{k=0}^{N} x^k$ en fonction de N et x.

En déduire une expression de la somme $\sum\limits_{k=0}^{N} kx^k$.

d)En déduire : $\sum\limits_{n=s}^{d}(n-d)P(X=n) = \dfrac{1}{p} + s - d - 1 - \dfrac{(1-p)^{d-s+1}}{p}$.

e)Montrer finalement : $D_s = d - s + 1 - \dfrac{1}{p} + \dfrac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}$.

3)Optimisation.

a)Simplifier $D_{s+1} - D_s$ et en déduire que D_s est minimale pour le plus petit entier strictement supérieur à $\sigma_p = d + \dfrac{\ln 2}{\ln(1-p)}$.

b)Montrer que si $p \geq \dfrac{1}{2}$, D_s est minimale pour $s = d$.

4)Exemple : il y a en moyenne 1 place sur 10 de libre, à quelle distance de l'arrivée doit-on commencer à chercher une place ?

On utilisera l'encadrement suivant : $2^{-\frac{1}{6}} < 0,9 < 2^{-\frac{1}{7}}$.

Indications / Réponses

Exercice 1

1)$X(\Omega) = \mathbf{N}^*$, ainsi X est discrète infinie.
Pour calculer les probabilités, introduire la famille d'événements B_k = « la k-ième boule tirée est blanche » et N_k = « la k-ième boule tirée est noire ».

2)a)Télescopez !

b)La série $\sum_{k\geq 1} kP(X=k)$ diverge (critère de convergence) donc X n'a pas d'espérance.

Exercice 2

1)Chercher d'abors $Y(\Omega)$, puis calculer $P(Y=k)$ en se servant de la loi de X.

2)Utiliser que $X = Y - 1$, puis appliquer les formules de cours donnant $E(aY+b)$ et $V(aY+b)$.

Exercice 3

1)$\forall k \in [\![-1,2]\!],\ P(X=k) = 1/4$.

2)Voir d'abord que $Y(\Omega) = \{1,2,5\}$.
En résolvant des équations, on trouve :
$P(Y=1) = P(X=0) = 1/4$, $P(Y=2) = P(X=-1) + P(X=1) = 1/2$ et $P(Y=5) = P(X=-2) + P(X=2) = 1/4$.

3)$E(X) = 1/2$, $E(X^2) = 3/2$ et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 5/4$.

4)$E(Y) = 5/2$.

Exercice 4

1)a)$X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}\left(3, \frac{2}{3}\right)$. Le cours donne :
$E(X) = 3 \times \frac{1}{3} = 1$ et $V(X) = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$,
$E(Y) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$ et $V(X) = 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

b)$Z(\Omega) = \{3\}$ donc Z suit une loi certaine et $E(Z) = 3$.

2)$T \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{3}\right)$. Le cours donne : $E(T) = \frac{1}{1/3} = 3$ et $V(X) = \frac{2/3}{(1/3)^2} = 6$.

Exercice 5

1)$X(\Omega) = [\![1,n]\!]$.

2)$\forall k \in [\![1,n-1]\!],\ P(X=k) = q^{k-1}p$.

3)$P(X=n) = q^{n-1}$.

4)a)C'est du cours ! La somme vaut $\frac{1-q^n}{1-q}$.

b)$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n-1} kP(X=k) + nP(X=n) = \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1}p + nq^{n-1}$

$= p\sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1} + nq^{n-1}$ et il reste à calculer la somme avec l'astuce suivante :

$$\sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} kq^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(q^k\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n-1} q^k\right)' = \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)' = \cdots$$

$\lim_{n\to+\infty} E(X) = \frac{1}{p}$, ce résultat est logique : on dispose d'un stock infini de flèches, X suit alors une loi géométrique dont l'espérance fait $\frac{1}{p}$.

Exercice 6

1)$X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Le cours donne $E(X) = np$ et $V(X) = npq$.

2)$Z \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1-q^2)$ car la probabilité qu'un joueur donné touche au moins une fois la cible sur les deux tirs vaut $1-q^2$.

$E(Z) = n(1-q^2)$ et $V(Z) = n(1-q^2)q^2$.

3)a)Y = nombre de joueurs ayant touché la cible au deuxième tir et manqué la cible au premier tir.

$Z \hookrightarrow \mathscr{B}(n, pq)$.

b)Non car par exemple, $P(X = n \cap Y = n) = 0 \neq P(X = n)P(Y = n)$.

Exercice 7

1)$X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.

2)L'événement $(X = k)$ est la réunion des 3 événements incompatibles deux à deux suivants :

$\left(B_1 \cap ... \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right)$, $\left(R_1 \cap ... \cap R_{k-1} \cap \overline{R_k}\right)$ et $\left(V_1 \cap ... \cap V_{k-1} \cap \overline{V_k}\right)$.

3)Utiliser la série géométrique. Attention, elle commence à $k = 2$ ici !

Exercice 8

1)a)$X(\Omega) = [\![s, +\infty[\![$.

b)$(X = n) = A_s \cap ... \cap A_{n-1} \cap \overline{A_n}$.

c)$P(X = n) = p(1-p)^{n-s}$.

d)On pose $Y = X - s + 1$. On voit que $Y(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$.

Puis, $P(Y = k) = P(X = s - 1 + k) = p(1-p)^{k-1}$ donc $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

e)$E(X) = E(Y) + s - 1 = \frac{1}{p} + s - 1$.

2)a)On montre la convergence de la série $\sum_{n \geq s} |n-d|p(1-p)^{n-s}$ (thm de transfert).

c)$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{N+1}-1}{x-1}$, puis en dérivant : $\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{Nx^{N+1}-(N+1)x^N+1}{(x-1)^2}$.

D'où $\sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{x}{(x-1)^2}\left(Nx^{N+1} - (N+1)x^N + 1\right)$.

3)a)$D_{s+1} - D_s = 2(1-p)^{d-s} - 1$.

En résolvant l'inéquation, on obtient : $D_{s+1} - D_s > 0 \iff s > \sigma_p$.

Cela signifie que la suite (D_s) est décroissante de l'indice $s = 0$ à l'indice $s = \lfloor \sigma_p \rfloor + 1$, puis croissante de l'indice $s = \lfloor \sigma_p \rfloor + 1$ à l'indice $s = d$.

C'est donc pour la valeur $s = \lfloor \sigma_p \rfloor + 1$ que D_s est minimale.

4)$p = 0,1$ donc $1 - p = 0,9$, puis $2^{-\frac{1}{6}} < 1 - p < 2^{-\frac{1}{7}}$.

En passant au logarithme, on déduit : $-7 < \frac{\ln 2}{\ln(1-p)} < -6$, puis $d - 7 < \sigma_p < d - 6$.

Donc $\lfloor \sigma_p \rfloor + 1 = d - 6$.

C'est donc à 6 numéros de l'arrivée qu'on doit commencer à chercher une place.