Correction DS1 ecg2 - maths appliquées

Exercice 1

1)a)$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ |2x+y-z=0\right\}$

$= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ |z = 2x+y\right\}$

$= \left\{(x,y,2x+y),\ (x,y) \in \mathbf{R}^2\right\}$

$= \left\{(x,0,2x)+(0,y,y),\ (x,y) \in \mathbf{R}^2\right\}$

$= \left\{x.(1,0,2)+y.(0,1,1),\ (x,y) \in \mathbf{R}^2\right\}$

$= \mathrm{Vect}\left((1,0,2),(0,1,1)\right)$.

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ et $\left((1,0,2),(0,1,1)\right)$ est une famille génératrice de F.

b)Les vecteurs $(1,0,2)$ et $(0,1,1)$ ne sont pas colinéaires. Donc la famille $\left((1,0,2),(0,1,1)\right)$ est libre. Comme c'est une famille libre et génératrice de F, c'est donc une base de F. On conclut que $dimF = 2$.

2)a)Les coordonnées de $u = (2,-3,1)$ vérifient l'équation de F car $2\times2-3-1=0$. Donc $u \in F$. De même, $v = (3,1,7) \in F$.

En revanche, les coordonnées de $w = (1,1,-1)$ ne vérifient pas l'équation de F puisque $2\times1+1-(-1) \neq 0$. Donc $w \notin F$.

b)Pour tous réels a, b et c, on a :

$$a.u+b.v+c.w=0 \iff a.(2,-3,1)+b.(3,1,7)+c.(1,1,-1)=(0,0,0)$$
$$\iff (2a+3b+c,-3a+b+c,a+7b-c)=(0,0,0)$$
$$\iff \begin{cases} 2a+3b+c=0 & L_1 \\ -3a+b+c=0 & L_2 \\ a+7b-c=0 & L_3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2a+3b+c=0 & L_1 \\ 11b+5c=0 & L_2 \leftarrow 3L_1+2L_2 \\ -11b+3c=0 & L_3 \leftarrow L_1-2L_3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2a+3b+c=0 & L_1 \\ 11b+5c=0 & L_2 \\ 8c=0 & L_3 \leftarrow L_2+L_3 \end{cases}$$
$$\iff a=b=c=0.$$

Donc (u,v,w) est libre.

De plus, le cardinal de la famille (u,v,w) est égal à 3, tout comme la dimension de $\mathbf{R}^3$. Donc (u,v,w) est une base de $\mathbf{R}^3$.

3)Soit $x=(1,3,\gamma)$.

$x \in \mathrm{Vect}\,(v,w)$

$\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2,\ x=\alpha.v+\beta.w$

$\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2,\ (1,3,\gamma)=\alpha(3,1,7)+\beta(1,1,-1)$

$$\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2,\ \begin{cases} 3\alpha+\beta=1 & L_1 \\ \alpha+\beta=3 & L_2 \\ 7\alpha-\beta=\gamma & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2,\ \begin{cases} 3\alpha+\beta=1 & L_1 \\ 2\alpha=-2 & L_2\leftarrow L_1-L_2 \\ 7\alpha-\beta=\gamma & L_3\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta=4 \\ \alpha=-1 \\ \gamma=-11\end{cases}$$

Ainsi, si $x\in \text{Vect}\,(v,w)$, alors $\gamma=-11$.

Réciproquement, si $\gamma=-11$, on a alors $x=(1,3,-11)=-1.v+4.w$.
Donc $x\in\text{Vect}\,(v,w)$.

On conclut que $x\in\text{Vect}\,(v,w)\iff\gamma=-11$.

Exercice 2

1)$F=\left\{(x_1,...,x_n)\in\mathbf{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i=0\right\}$

$=\left\{(x_1,...,x_n)\in\mathbf{R}^n \mid x_n=-\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right\}$

$=\left\{\left(x_1,...,x_{n-1},-\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right),\ (x_1,...,x_{n-1})\in\mathbf{R}^{n-1}\right\}$

$=\left\{(x_1,0,...,0,-x_1)+(0,x_2,0,...,0,-x_2)+...+(0,...,0,x_{n-1},-x_{n-1}),\ (x_1,...,x_{n-1})\in\mathbf{R}^{n-1}\right\}$

$=\left\{x_1.(1,0,...,0,-1)+x_2.(0,1,0,...,0,-1)+...+x_{n-1}.(0,...,0,1,-1),\ (x_1,...,x_{n-1})\in\mathbf{R}^{n-1}\right\}$

$=\left\{x_1.(e_1-e_n)+x_2.(e_2-e_n)+...+x_{n-1}.(e_{n-1}-e_n),\ (x_1,...,x_{n-1})\in\mathbf{R}^{n-1}\right\}$

$=\left\{x_1.u_1+x_2.u_2+...+x_{n-1}.u_{n-1},\ (x_1,...,x_{n-1})\in\mathbf{R}^{n-1}\right\}$

$=\text{Vect}\,(u_1,...,u_{n-1})$

2)Pour tous réels a_1, ..., a_{n-1}, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} a_iu_i=0 &\iff \sum_{i=1}^{n-1} a_i(e_i-e_n)=0\\ &\iff \sum_{i=1}^{n-1}(a_ie_i-a_ie_n)=0\\ &\iff \sum_{i=1}^{n-1} a_ie_i-\sum_{i=1}^{n-1} a_ie_n=0\\ &\iff \sum_{i=1}^{n-1} a_ie_i-\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)e_n=0 \quad (*)\end{aligned}$$

Comme $(e_1,...,e_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$, elle est libre. L'égalité $(*)$ mène alors à :

$\forall i\in[\![1,n-1]\!],\ a_i=0$ et $\sum_{i=1}^{n-1} a_i=0$.

Ainsi, la famille $(u_1,...,u_{n-1})$ est libre.

La question 1) prouve que la famille $(u_1,...,u_{n-1})$ est génératrice de F.

Donc $(u_1,...,u_{n-1})$ est une base de F. On déduit que $dimF=n-1$.

3)On suppose que $n = 4$ et $w = (1,1,1,1)$.

a)$u_1 = e_1 - e_4 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 - 1e_4$
$u_2 = e_2 - e_4 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 - 1e_4$
$u_3 = e_3 - e_4 = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3 - 1e_4$
$w = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3 + 1e_4$.

Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b)On transforme P par les opérations de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_1 + L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_2 + L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_3 + L_4 \end{matrix}$$

La matrice de gauche est inversible car triangulaire sans zéro sur la diagonale. Donc P est inversible.
On peut conclure que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbf{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 4L_1 - L_4 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 - L_4 \\ L_3 \leftarrow 4L_3 - L_4 \\ L_4 \end{matrix}$$

Donc $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c)Les coordonnées de $u = (1,2,3,4)$ dans la base $\mathscr{B}$ sont $(1,2,3,4)$.

Le vecteur colonne U de u dans la base $\mathscr{B}$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Le vecteur colonne U' de u dans la base $\mathscr{C}$ est donné par la formule de changement de base : $U = PU'$.

On déduit : $U' = P^{-1}U = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées de u dans la base $\mathscr{C}$ sont donc $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

4)a)$w = (y_1, ..., y_n)$. Par hypothèse, $\sum_{i=1}^{n} y_i = 0$. Cela signifie que $w \in F$.

Comme $(u_1, ..., u_{n-1})$ est une famille génératrice de F et que $w \in F$, on est sûr que w est combinaison linéaire de u_1, ..., u_{n-1}.
Donc la famille $\mathscr{C}$ est liée.

b)Par hypothèse, $\sum_{i=1}^{n} y_i \neq 0$. Cela signifie que $w \notin F$.

Montrons que $\mathscr{C}$ est libre.

Pour tous réels a_1, ..., a_n, on a :

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i u_i + a_n w = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n-1} a_i(e_i - e_n) + a_n \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_n + \sum_{i=1}^{n} a_n y_i e_i = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_n y_i e_i + a_n y_n e_n = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + a_n y_i) e_i + \left(a_n y_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) e_n = 0$$

$(e_1, ..., e_n)$ étant libre, l'égalité précédente est équivalente à :

$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ a_i + a_n y_i = 0$ et $a_n y_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i = 0$.

$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ a_i = -a_n y_i$ et $a_n y_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_n y_i = 0$.

$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ a_i = -a_n y_i$ et $a_n \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i}_{\neq 0} = 0$.

$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ a_i = -a_n y_i$ et $a_n = 0$.

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i = 0$.

Donc $\mathscr{C}$ est libre.

De plus, $\mathscr{C}$ est de cardinal n coïncidant avec la dimension de $\mathbf{R}^n$. C'est donc une base de $\mathbf{R}^n$.

Exercice 3

Partie A :

1)On utilise la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{matrix}$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2)$D = P^{-1}GP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\Delta = P^{-1}HP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

D et Δ sont bien diagonales.

3)On vérifie que $H^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $HG = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 5 \\ -6 & 4 & 6 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, et $GH = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 5 \\ -6 & 4 & 6 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

4)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $H^nG = GH^n$ ».

$\mathscr{P}(1)$ s'écrit : « $HG = GH$ », vrai d'après A3.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} H^{n+1}G &= \left(HH^n\right)G \\ &= H\left(H^nG\right) \\ &= H\left(GH^n\right) \quad \text{par Hypothèse de récurrence} \\ &= (HG)\,H^n \\ &= (GH)\,H^n \quad \text{d'après A3} \\ &= GH^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ H^nG = GH^n$.

Partie B :
1)On peut constater d'abord quelle que soit la matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$, les matrices HMG et GMH le sont également par produit de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
Puis, par différence, $f(M) \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. Donc f est « endo ».

De plus, pour toutes matrices M et N de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$, pour tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= H(\lambda M + N)G - G(\lambda M + N)H \\ &= (H\lambda M + HN)G - (G\lambda M + GN)H \\ &= H\lambda MG + HNG - G\lambda MH - GNH \\ &= \lambda(HMG - GMH) + (HNG - GNH) \\ &= \lambda f(M) + f(N). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

On conclut f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

2)$f(I) = HIG - GIH = HG - GH = 0$ d'après A3

$f(H) = HHG - GHH = H^2G - GH^2 = 0$ d'après A4 avec $n = 2$

$f(H^2) = HH^2G - GH^2H = H^3G - GH^3 = 0$ d'après A4 avec $n = 3$.

Donc les matrices I, H et H^2 appartiennent à $Kerf$.

$Kerf$ étant un espace vectoriel, il est stable par combinaison linéaire.
Toute matrice combinaison linéaire de I, H et H^2 est donc encore dans $Kerf$.
Cela revient à dire que $\text{Vect}\,(I, H, H^2) \subset Kerf$.

3)Pour tous réels a, b et c, on a :

$$aI + bH + cH^2 = 0 \quad (*)$$

$$\iff a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a - 4b - 2c & 3b + 3c & 3b + 3c \\ -3b - 3c & a + 2b + 4c & 3b + 3c \\ -3b - 3c & 3b + 3c & a + 2b + 4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a - 4b - 2c = 0 \\ 3b + 3c = 0 \\ a + 2b + 4c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = -c \\ a = -2c \end{cases}$$

$(-2, -1, 1)$ est solution du système. Donc la famille (I, H, H^2) est liée.

En remplaçant cette solution trouvée dans $(*)$, on obtient : $-2I - H + H^2 = 0$, soit $H^2 = H + 2I$.

Donc $\text{Vect}\,(I, H, H^2) = \text{Vect}\,(I, H)$.

(I, H) est une famille génératrice de $\text{Vect}\,(I, H)$ et libre car I et H ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de $\text{Vect}\,(I, H)$.
Donc $dim\text{Vect}\,(I, H, H^2) = dim\text{Vect}\,(I, H) = 2$.

Enfin, $\text{Vect}\,(I, H, H^2) \subset Kerf$ donc $dimKerf \geq dim\text{Vect}\,(I, H, H^2)$.

C'est-à-dire : $dim(Kerf) \geq 2$.

Partie C :

1) $M \in Kerf \iff f(M) = 0$

$$\iff HMG = GMH$$
$$\iff P\Delta P^{-1}MPDP^{-1} = PDP^{-1}MP\Delta P^{-1}$$
$$\iff \underbrace{P^{-1}P}_{I}\Delta P^{-1}MPDP^{-1} = \underbrace{P^{-1}P}_{I}DP^{-1}MP\Delta P^{-1}$$
$$\iff \Delta P^{-1}MPD\underbrace{P^{-1}P}_{I} = DP^{-1}MP\Delta\underbrace{P^{-1}P}_{I}$$
$$\iff \Delta P^{-1}MPD = DP^{-1}MP\Delta.$$

2) Soit X une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. Posons $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$\Delta XD = DX\Delta$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 4a & 4b & 2c \\ -2d & -2e & -f \\ -2g & -2h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & -2b & -2c \\ 4d & -2e & -2f \\ 2g & -h & -i \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 4b = -2b \\ 2c = -2c \\ -2d = 4d \\ -f = -2f \\ -2g = 2g \\ -2h = -h \end{cases}$$

$$\iff b = c = d = g = h = 0$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

En renommant les lettres $a \to \alpha$, $e \to \beta$ et $i \to \gamma$, on obtient :

$$\Delta XD = DX\Delta \iff X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \text{ où } (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbf{R}^3.$$

3) $M \in Kerf$

$$\iff \Delta P^{-1}MPD = DP^{-1}MP\Delta \quad \text{grâce à C1}$$

$$\iff P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{en appliquant C2 avec } X = P^{-1}MP$$

$$\iff M = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\iff M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow M = \begin{pmatrix} -\alpha + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha - \gamma \\ -\alpha + \beta & \alpha & \alpha - \beta \\ -\alpha - \beta + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix}$$

Donc $Kerf = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha - \gamma \\ -\alpha + \beta & \alpha & \alpha - \beta \\ -\alpha - \beta + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3 \right\}$.

4)De la question précédente, on déduit :

$$Kerf = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3 \right\}$$

$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $Kerf$.

De plus, pour tous réels α, β et γ, on a :

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -\alpha + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha - \gamma \\ -\alpha + \beta & \alpha & \alpha - \beta \\ -\alpha - \beta + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -\alpha + 2\gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ -\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.

Donc $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre.

C'est une famille libre et génératrice de $Kerf$ donc une base de $Kerf$.
Donc $dimKerf = 3$.

Exercice 4 (extrait edhec 2007)

1)La fonction $g : x \mapsto x - \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$\forall x > 0,\ g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

D'où le tableau de variations de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Le minimum de g vaut 1. Donc $\forall x > 0,\ g(x) \geq 1 > 0$.

Ainsi, $\forall x > 0,\ x - \ln x > 0$.

2)a)f est continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient et différence de fonctions continues.

Pour trouver $\lim\limits_{x \to 0^+}$, on écrit :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{\ln x}{\ln x\left(\frac{x}{\ln x} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1}.$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+$. Par quotient, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\ln x} = 0$.

D'où, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1 = f(0)$. Donc f est continue à droite en 0.

Finalement, f est continue sur $[0, +\infty[$.

b)$\forall x > 0,\ \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{\frac{\ln x}{x - \ln x} + 1}{x} = \dfrac{\frac{x}{x - \ln x}}{x} = \dfrac{1}{x - \ln x}$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+$. Par différence, $\lim\limits_{x \to 0^+} (x - \ln x) = +\infty$.

Par inverse, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

c)f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient et différence de fonctions dérivables.

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x - \ln x) - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln x}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \frac{\ln x}{x} - \ln x + \frac{\ln x}{x}}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}.$$

d)On écrit comme pour la question 2)a) : $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$ par croissances comparées. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{\ln x} - 1\right) = +\infty$.

Par inverse, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

e)$\forall x > 0,\ (x - \ln x)^2 > 0$ donc $f'(x) \geq 0 \iff 1 - \ln x \geq 0 \iff \ln x \leq 1 \iff x \leq e$.

D'où le tableau de variations de f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

f)Courbe