TD7 - compléments sur les séries

Exercice 1 ★ ☆ ☆☆
Etudier la nature des séries, puis calculer leur somme en cas de convergence.

1) $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 2) $\sum_{n\geq 0}\frac{(-3)^n}{4^n}$ 3) $\sum_{n\geq 0} e^{-n}$ 4) $\sum_{n\geq 0}\frac{3^{2n}}{8^n}$.

Exercice 2 ★ ☆ ☆☆
Etudier la nature des séries, puis calculer leur somme en cas de convergence.

1) $\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 2) $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^{n-1}}$ 3) $\sum_{n\geq 1}\frac{3^n}{n2^n}$.

Exercice 3 ★ ☆ ☆☆
Etudier la nature des séries, puis calculer leur somme en cas de convergence.

1) $\sum_{n\geq 2} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$ 2) $\sum_{n\geq 0}\frac{5^n}{n!}$ 3) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}$ 4) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 4 ★ ☆ ☆☆
Montrer que la série $\sum_{n\geq 0}\frac{n+3}{2^n}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 5 ★ ★ ☆☆
Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 6 ★ ★ ☆☆
Montrer que la série $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{(n-1)!}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 7 ★ ★ ☆☆
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel x pour que la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2-3x}{1+x}\right)^n$ converge, puis calculer sa somme en fonction de x.

Exercice 8 ★ ★ ☆☆
Etudier la nature des séries, puis calculer leur somme en cas de convergence.

1) $\sum_{n\geq 1}\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right)$ 2) $\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 3) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1}$.

Exercice 9 ★ ☆ ☆☆
A l'aide du critère d'équivalence, étudier la nature des séries suivantes :

1) $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+3n+1}{(2n+1)^3}$ 2) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

Exercice 10 ★ ★ ☆☆
A l'aide du critère de comparaison, étudier la nature des séries suivantes :

1) $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 2) $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(\ln n)^n}$

Exercice 11 ★ ★ ☆☆

A l'aide du critère de négligeabilité, étudier la nature des séries suivantes :

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$ 2) $\sum_{n\geq 0} n^3 e^{-n}$.

Exercice 12 ★ ★ ☆☆

Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $U_0 = 1$ et l'égalité $\forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+1} = U_n e^{-U_n}$.

1)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n > 0$.

2)Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et préciser sa limite.

3)Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \ln U_n = -\sum_{k=0}^{n-1} U_k$.

4)Conclure sur la nature de la série $\sum_{n\geq 0} U_n$.

Exercice 13 ★ ★ ★☆

Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ U_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$.

1)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ U_n - U_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}$.

2)En déduire que $U_n - U_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} (U_n - U_{n+1})$?

3)Conclure que $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge. En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 14 ★ ★ ★☆

Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$ est convergente et préciser sa somme.

Exercice 15 (extrait hec 2009) ★ ★ ★☆

Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ et l'égalité :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n.$$

On note a et b (avec $a > b$) les solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

1)a)Montrer que $b = 1 - a = -\frac{1}{a}$. Etablir que $1 < a < 2$ et $-1 < b < 0$.

1)b)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^n - b^n\right)$.

1)c)En déduire un équivalent de U_n quand $n \to +\infty$.

2)Soit y un réel tel que $|y| < 1$ et $k \in \mathbf{N}$.

a)Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} n^k y^n$ est absolument convergente.

b)En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} n^k \frac{U_n}{2^{n+1}}$.

c)Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{U_n}{2^{n+1}} = 1$.

Indications / Réponses

Exercice 1
Ce sont des séries géométriques de termes généraux $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\left(\frac{-3}{4}\right)^n$, $\left(\frac{1}{e}\right)^n$ et $\left(\frac{9}{8}\right)^n$.
Les trois premières convergent, de sommes respectivement égales à 3, $\frac{4}{7}$ et $\frac{e}{e-1}$.
La dernière diverge car $\frac{9}{8} > 1$.

Exercice 2
Les deux premières sont des séries dérivées premières convergentes de paramètre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ de sommes respectivement égales à $\frac{9}{4}$ et 4.
La troisième n'est pas une série de référence, mais elle diverge car son terme général ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$.

Exercice 3
La première est une série dérivée seconde convergente de paramètre $\frac{1}{3}$ et de somme égale à $\frac{27}{4}$.
La seconde est une série exponentielle de paramètre 5 et de somme égale à e^5.
La troisième est une série exponentielle de paramètre 1 car $\frac{1}{n!} = \frac{1^n}{n!}$.
Sa somme est égale à $e^1 = e$.
La quatrième est une série de Riemann de paramètre $\frac{1}{2}$ car $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$.
Elle diverge car $\frac{1}{2} \leq 1$.

Exercice 4
On écrit : $\frac{n+3}{2^n} = \frac{1}{2} \times n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
La série étudiée est convergente comme combinaison linéaire de séries convergentes et de somme égale à : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{(1-1/2)^2} + 3 \times \frac{1}{1-1/2} = 8$.

Exercice 5
Utiliser l'astuce $n^2 = n(n-1) + n$, puis procéder comme pour l'exercice 4.
La somme de la série vaut $88/3$.

Exercice 6
Dans la somme partielle $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{(k-1)!}$ poser $j = k-1$ de sorte à faire apparaître la somme partielle d'une série exponentielle, puis faire $n \to +\infty$.
On trouve que la somme de la série est $1 - e^{-1}$.

Exercice 7
C'est une série géométrique de paramètre $\frac{2-3x}{1+x}$. Elle converge ssi $-1 < \frac{2-3x}{1+x} < 1$, ce qui mène à $\frac{1}{4} < x < \frac{3}{2}$.
La somme de la série vaut $\frac{1+x}{4x-1}$.

Exercice 8
Les trois séries sont télescopiques, c'est clair pour la première, un peu moins pour la deuxième...
Pour la troisième, chercher des réels a et b tels que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n+1}$.

Exercice 9
La première série diverge car son terme général est équivalent à $\frac{1}{8n}$ ...
La seconde série converge car son terme général est équivalent à $\frac{1}{n^{3/2}}$.

Exercice 10

1)Utiliser que $\forall n \geq 3,\ \ln n \geq 1$, puis voir que la série diverge.

2)Utiliser que $\forall n \geq 8,\ \ln n \geq 2$, puis voir que la série converge.

Exercice 11

1)Trouver un réel $\alpha > 1$ tel que $\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, puis conclure.

2)Vérifier par exemple que $n^3 e^{-n} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, puis conclure.

Exercice 12

1)Récurrence facile.

2)Thm de la limite monotone, puis thm du point fixe. On trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

3)Pour l'hérédité, utiliser l'égalité $U_{n+1} = U_n e^{-U_n}$.

4)Un passage à la limite dans la question 3) fournit la réponse.

Exercice 13

2)Pour montrer l'équivalent, écrire le DL à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$.

Exercice 14

Faire apparaître deux séries télescopiques.

Exercice 15

1)c)$U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{a^n}{\sqrt{5}}$.

2)a)Montrer au préalable que $n^k y^n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2)b)Utiliser 1)c).