
Exercice 1 (eml 2023)

1)a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme composée et quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{-e^{-x}x - e^{-x}}{x^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}.$$

$\forall x > 0, -e^{-x} < 0$ et $x+1 > 0$ donc $f'(x) < 0$.

Donc f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$. Par composée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1$. Par composée, $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$, par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

b) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « u_n existe et $u_n > 0$ ».

$\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque u_0 existe et vaut 1, par énoncé.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$. Donc $u_n \in D_f$, ce qui assure l'existence de $f(u_n)$, c'est-à-dire de u_{n+1} .

De plus, d'après le tableau de variations de f , on a : $f(u_n) > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 0$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

2)a) programme :

```
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while u<=a:
        u=exp(-u)/u
        n=n+1
    return n
```

b) programme :

```
def fonc_2(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while u>a :
        u=exp(-u)/u
        n=n+1
    return n
```

Les valeurs renvoyées par les fonctions montrent que $u_5 \leq 10^{-6}$ et $u_6 \geq 10^6$.
Il semble donc que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge.

✓ Le sujet d'origine comportait une erreur d'inégalité, je l'ai rectifiée.

c)programme :

```
from numpy import exp
def suite(n):
    u=1
    for k in range(1,n+1):
        u=exp(-u)/u
    return u
```

✓ « for k in range(n) » marche aussi.

3)a) g est dérivable (donc continue) sur $[0, +\infty[$ par composée et différence de fonctions dérivables.

$$\forall x \geq 0, g'(x) = -e^{-x} - 2x.$$

$\forall x \geq 0, -e^{-x} < 0$ et $-2x \leq 0$ donc $g'(x) < 0$, ce qui montre que g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

D'après le théorème de bijection, g est donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $g([0, +\infty[)$.
Avec $g([0, +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(0)]$.

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty. \text{ Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

$$\text{Et } g(0) = 1.$$

On conclut que g est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $] -\infty, 1]$.

$$\text{b) } \forall x > 0, f(x) = x \iff \frac{e^{-x}}{x} = x \iff e^{-x} = x^2 \iff g(x) = 0.$$

g est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $] -\infty, 1]$ et $0 \in] -\infty, 1]$.

Donc 0 admet par g un unique antécédent, noté $\alpha \in [0, +\infty[$. Comme $g(0) \neq 0$, on peut même affirmer que $\alpha > 0$.

Donc l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha > 0$.

$$\text{c) } g\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}} - \frac{1}{e^2} = e^{-\frac{1}{e}} - e^{-2} > 0 \text{ car } -\frac{1}{e} > -2 \text{ et } x \mapsto e^x \text{ est croissante,}$$

$$g(1) = e^{-1} - 1 < 0,$$

$$g(\alpha) = 0.$$

$$\text{On a donc } g(1) < g(\alpha) < g\left(\frac{1}{e}\right).$$

Par stricte décroissance de g , on déduit : $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.

4)a) $u_1 = f(u_0) = f(1) = e^{-1}$.

Puis, $u_2 = f(u_1) = f(e^{-1}) = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{e}}}{\frac{1}{e}} = e \times e^{-\frac{1}{e}} = e^{1-\frac{1}{e}} > 1$ car $1 - \frac{1}{e} > 0$.

Donc $u_2 > u_0$.

b) Montrons par récurrence que la proposition $\mathcal{P}(n) : \ll u_{2n+2} \geq u_{2n} \gg$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

$\mathcal{P}(0)$ s'écrit : $\ll u_2 \geq u_0$, elle est vraie d'après 4)a).

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence et compte tenu de 1)b), on a : $u_{2n+2} \geq u_{2n} > 0$.

Par décroissance de f sur $]0, +\infty[$, on déduit : $f(u_{2n+2}) \leq f(u_{2n})$, c'est-à-dire $u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$.

De nouveau par décroissance de f sur $]0, +\infty[$, on a : $f(u_{2n+3}) \geq f(u_{2n+1})$, c'est-à-dire $u_{2n+4} \geq u_{2n+2}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{2n+2} \geq u_{2n}$, ce qui montre que la suite (u_{2n}) est croissante.

c) De la question précédente, on déduit par décroissance de f :

$\forall n \in \mathbf{N}$, $f(u_{2n+2}) \leq f(u_{2n})$, c'est-à-dire $u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$.

Donc la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante.

Etant par ailleurs minorée (par 0), elle est donc convergente, d'après le théorème de la limite monotone.

5)a) Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} h(x) &= (f \circ f)(x) \\ &= f(f(x)) \\ &= \frac{e^{-f(x)}}{f(x)} \\ &= \frac{e^{-f(x)}}{\frac{e^{-x}}{x}} \\ &= xe^x e^{-f(x)} \\ &= xe^{x - \frac{e-x}{x}} \\ &= xe^{\frac{x^2 - e - x}{x}} \\ &= xe^{-\frac{g(x)}{x}}. \end{aligned}$$

b) f est continue sur $]0, +\infty[$ et prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$. Par composée, h est continue sur $]0, +\infty[$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Par composée, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0 = h(0)$. Donc h est continue en 0.

Ainsi, h est continue sur $[0, +\infty[$.

c) Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
h(x) = x &\iff xe^{-\frac{g(x)}{x}} = x \iff x \left(e^{-\frac{g(x)}{x}} - 1 \right) = 0 \iff e^{-\frac{g(x)}{x}} - 1 = 0 \\
&\iff e^{-\frac{g(x)}{x}} = 1 \iff -\frac{g(x)}{x} = 0 \iff g(x) = 0 \iff x = \alpha.
\end{aligned}$$

De plus, $h(0) = 0$.

Donc les seules solutions de l'équation $h(x) = x$ sont 0 et α .

$$d) \forall n \in \mathbf{N}, h(u_{2n+1}) = (f \circ f)(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n+1})) = f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}.$$

Notons $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}$.

On sait que $\forall n \in \mathbf{N}, 0 < u_{2n+1} \leq u_1$ par décroissance de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$.

Par passage à la limite, on déduit : $0 \leq L \leq u_1$ avec $u_1 = f(u_0) = f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Or, d'après la question 3)c), $\frac{1}{e} < \alpha$. On a donc $0 \leq L < \alpha$ (*)

h est continue sur $[0, +\infty[$ donc en L .

D'après le théorème du point fixe, L est donc solution de l'équation $h(x) = x$, elle vaut donc 0 ou α . Elle ne peut valoir α , grâce à (*). Donc elle vaut 0.

Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0$.

6) Supposons que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$ est majorée.

Etant croissante, elle converge, d'après le théorème de la limite monotone.

Notons $L' = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n}$.

Par croissance de la suite, on a : $\forall n \in \mathbf{N}, u_{2n} \geq u_0 = 1$.

Puis, par passage à la limite : $L' \geq 1$ (**)

Or, d'après le théorème du point fixe, on doit avoir $L' = 0$ ou $L' = \alpha < 1$, ce qui contredit (**).

Donc la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$ n'est pas majorée.

Comme $(u_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante et non majorée, on a nécessairement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = +\infty.$$

Exercice 2 (eml 2023)**Partie I**

$$1)a) A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de $A - 2I$ sont identiques et non nulles donc $rg(A - 2I) = 1$.

b)• $A - 2I$ est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ dont le rang est strictement inférieur à 3. Donc $A - 2I$ n'est pas inversible, ce qui prouve que 2 est valeur propre de A .

• Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$.

$$\begin{aligned} \dim E_2 &= \dim \text{Ker}(f - 2Id) \\ &= \dim(\mathbf{R}^3) - \dim \text{Im}(f - 2Id) \quad \text{par le théorème du rang} \\ &= 3 - rg(f - 2Id) \\ &= 3 - rg(A - 2I) \\ &= 2. \end{aligned}$$

c) Déterminons une base de $E_2 = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A - 2I)U = 0\}$.

En posant $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a : $(A - 2I)U = 0 \iff x + y + z = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } E_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - y \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \right\}. \\ &= \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right). \\ &\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une famille génératrice de } E_2 \text{ et libre car les deux} \\ &\text{vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de } E_2. \end{aligned}$$

d) Notons :

p le nombre de valeurs propres de A ,

$\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de A ,

$E_{\lambda_1}(A), \dots, E_{\lambda_p}(A)$ les sous-espaces propres de A .

Comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, on a : $\sum_{i=1}^p \dim E_{\lambda_i}(A) \leq 3 \quad (*)$

L'une des valeurs propres λ_i vaut 2, supposons par exemple que c'est λ_p .

On a alors : $\underbrace{\dim E_2}_{=2} + \sum_{i=1}^{p-1} \dim E_{\lambda_i}(A) \leq 3$.

Donc $\sum_{i=1}^{p-1} \dim E_{\lambda_i}(A) \leq 1$.

Enfin, chacun des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(A)$ est au moins de dimension 1.

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^{p-1} \dim E_{\lambda_i}(A) \geq p-1.$$

On conclut que $p-1 \leq 1$, c'est-à-dire que $p \leq 2$.

Ainsi, A peut éventuellement avoir une deuxième valeur propre (mais pas plus !)

✓ On peut remarquer que A est symétrique donc diagonalisable.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de A doit valoir exactement 3, ce qui oblige A à avoir une deuxième valeur propre.

$$2)a) \text{ Posons } M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}. \text{ On a alors : } MU = \begin{pmatrix} a+b+c \\ d+e+f \\ g+h+i \end{pmatrix}.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, la i -ème coordonnée de MU est donc la somme des coefficients de la i -ème ligne de M .

$$b) \bullet AU = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5U.$$

$U \neq 0$ et $AU = 5U$ donc 5 est une valeur propre de A .

• On a donc $\dim E_5(A) \geq 1$.

Par ailleurs, on sait que $\dim E_2(A) + \dim E_5(A) \leq 3$ et que $\dim E_2(A) = 2$ donc $\dim E_5(A) \leq 1$.

Ainsi, $\dim E_5(A) = 1$.

(U) est une famille libre de $E_5(A)$ car $U \neq 0$.

C'est une famille dont le cardinal vaut 1 et coïncide avec la dimension de $E_5(A)$, c'est donc une base de $E_5(A)$.

3) A est diagonalisable pour deux raisons :

- elle est symétrique,
- la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut 3 et on conclut par le théorème de réduction.

Il existe donc une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$ où :

- D porte en diagonale les valeurs propres de A ,
- les colonnes de P sont formées des bases des sous-espaces propres de A , rangées dans le même ordre que les valeurs propres de A .

$$\text{On prend par exemple : } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie II

$$4) \text{ Le système différentiel } (S) \text{ s'écrit matriciellement } X' = AX \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Comme A est diagonalisable, les solutions de (S) sont données par :

$$\begin{aligned}
X(t) &= \beta_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \beta_1 e^{2t} \\ 0 \\ -\beta_1 e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2 e^{2t} \\ -\beta_2 e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_3 e^{5t} \\ \beta_3 e^{5t} \\ \beta_3 e^{5t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \beta_1 e^{2t} + \beta_3 e^{5t} \\ \beta_2 e^{2t} + \beta_3 e^{5t} \\ -\beta_1 e^{2t} - \beta_2 e^{2t} + \beta_3 e^{5t} \end{pmatrix} \\
\text{Ainsi, } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \beta_1 e^{2t} + \beta_3 e^{5t} \\ \beta_2 e^{2t} + \beta_3 e^{5t} \\ -\beta_1 e^{2t} - \beta_2 e^{2t} + \beta_3 e^{5t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

5)a) C'est la propriété de Cauchy qui permet d'assurer l'existence d'une unique solution X_0 de (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) En reprenant la forme des solutions trouvées en 5)a), on a :

$$\begin{aligned}
X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_3 \\ \beta_2 + \beta_3 \\ -\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} \beta_1 + \beta_3 &= 1 & L_1 \\ \beta_2 + \beta_3 &= -1 & L_2 \\ -\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 &= 0 & L_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \beta_1 + \beta_3 &= 1 & L_1 \\ \beta_2 + \beta_3 &= -1 & L_2 \\ 3\beta_3 &= 0 & L_3 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \beta_1 &= 1 \\ \beta_2 &= -1 \\ \beta_3 &= 0 \end{cases} \\
\text{Donc } \forall t \in \mathbf{R}, X_0(t) &= \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Partie III

6) λ est valeur propre de B

$\iff B - \lambda I$ n'est pas inversible

$$\iff \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & -4 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff (-1 - \lambda)(3 - \lambda) - (-4) \times 1 = 0$$

$$\iff \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

$$\iff \lambda = 1.$$

Donc la seule valeur propre de B est 1.

7) Supposons B diagonalisable. Alors, il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $B = PDP^{-1}$.

D porte en diagonale les valeurs propres de A , elle est donc égale à I .

D'où, $B = PIP^{-1} = I$, ce qui est absurde.

Donc B n'est pas diagonalisable.

8)a) Les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires donc (v_1, v_2) est libre.

C'est une famille libre de $\mathbf{R}^2$ dont le cardinal vaut 2 et coïncide avec la dimension de $\mathbf{R}^2$. C'est donc une base de $\mathbf{R}^2$.

b) La matrice colonne de $f(v_1)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ est :

$$BV_1 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = V_1. \text{ Donc } f(v_1) = v_1.$$

La matrice colonne de $f(v_2)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ est :

$$BV_2 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = V_1 + V_2. \text{ Donc } f(v_2) = v_1 + v_2.$$

Donc la matrice de f dans la base $\beta = (v_1, v_2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) La formule de changement de base pour l'endomorphisme f s'écrit :

$T = Q^{-1}BQ$ ou encore $B = QTQ^{-1}$ où Q est la matrice de passage de la base canonique à la base β .

Ici, $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

9) • Le système (Σ) s'écrit matriciellement : $X' = BX$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

En utilisant la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} X' = BX &\iff X' = QTQ^{-1}X \\ &\iff Q^{-1}X' = Q^{-1}QTQ^{-1}X \\ &\iff Q^{-1}X' = TQ^{-1}X \\ &\iff (Q^{-1}X)' = T(Q^{-1}X). \end{aligned}$$

Pour tout réel t , posons : $Y(t) = Q^{-1}X(t)$.

En reprenant les équivalences ci-dessus, on a alors : $X' = BX \iff Y' = TY$.

• Résolvons maintenant le système différentiel $Y' = TY$.

Posons $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, où u et v sont des fonctions dérivables de la variable t .

$$Y' = TY \iff \begin{cases} u' = u + v \\ v' = v \end{cases}$$

Les solutions de l'équation différentielle $v' = v$ sont les fonctions $v : t \mapsto \beta e^t$, où β est un réel quelconque.

En reportant dans la première équation différentielle, on doit alors résoudre l'équation différentielle $u' = u + \beta e^t$ ou encore :

$$(E) : u' - u = \beta e^t.$$

- Résolvons (E) .

C'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants qu'on résout suivant la méthode classique.

L'équation différentielle linéaire homogène associée est : $u' - u = 0$ dont les solutions sont $u_0 : t \mapsto \alpha e^t$, où α est un réel quelconque.

Il reste à trouver une solution *particulière* de (E) .

Compte tenu du membre de droite, on peut chercher une solution particulière sous la forme $u_p : t \mapsto (at + b)e^t$ où a et b sont des réels quelconques.

u_p est solution de (E)

$$\iff \forall t \in \mathbf{R}, u'_p(t) - u_p(t) = \beta e^t$$

$$\iff \forall t \in \mathbf{R}, a e^t + (at + b)e^t - (at + b)e^t = \beta e^t$$

$$\iff a = \beta.$$

Il n'y a pas de contrainte sur le réel b cherché. On peut donc prendre pour b la valeur qu'on veut, par exemple 0.

Alors, $u_p : t \mapsto \beta t e^t$ est une solution particulière de (E) .

La solution générale de (E) s'obtient enfin en ajoutant à toutes les solutions u_0 de l'équation homogène la solution particulière u_p trouvée précédemment.

Ainsi, les solutions de (E) sont $t \mapsto \alpha e^t + \beta t e^t$, où α est un réel quelconque.

- Les solutions du système différentiel $Y' = TY$ sont donc les matrices colonnes

$Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ données par :

$$\begin{cases} u(t) &= \alpha e^t + \beta t e^t \\ v(t) &= \beta e^t \end{cases}$$

On revient ensuite au système différentiel (Σ) en remarquant que :

$Y(t) = Q^{-1}X(t) \iff X(t) = QY(t)$, ce qui donne :

$X(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u(t) - v(t) \\ -u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\alpha e^t + \beta t e^t) - \beta e^t \\ -(\alpha e^t + \beta t e^t) \end{pmatrix}.$$

Finalement, les solutions de (Σ) sont :

$$\begin{cases} x(t) &= (2\alpha + 2\beta t - \beta) e^t \\ y(t) &= -(\alpha + \beta t) e^t \end{cases}$$

Exercice 3 (eml 2023)**Partie I**

1)a) h est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ (par croissances comparées) et $h(0) = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0)$, ce qui montre la continuité (à droite) de h en 0.

Ainsi, h est continue sur $[0, +\infty[$.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

Cette limite est infinie donc h n'est pas dérivable en 0.

c) Les antécédents de 0 par h sont les solutions de l'équation $h(x) = 0$.

On a déjà $h(0) = 0$ donc 0 est un antécédent de h .

De plus, $\forall x > 0$, $h(x) = 0 \iff x \ln x = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$.

Les antécédents de 0 par h sont donc 0 et 1.

2)• h est dérivable sur $]0, 1]$ donc sur $]0, 1[$.

$x \mapsto (1-x)$ est dérivable sur $[0, 1]$ donc sur $]0, 1[$ et ne s'annule pas sur $]0, 1[$.

Par composée, $x \mapsto -h(1-x)$ est dérivable sur $]0, 1[$.

$x \mapsto -h(x)$ est dérivable sur $]0, 1[$.

Par différence, g est dérivable sur $]0, 1[$.

• Avant de calculer $g'(x)$, remarquons que $h'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1[, \quad g'(x) &= -h'(x) - (-1) \times h'(1-x) \quad \text{par la formule de dérivation composée} \\ &= -h'(x) + h'(1-x) \\ &= -(\ln x + 1) + (\ln(1-x) + 1) \\ &= \ln(1-x) - \ln x. \end{aligned}$$

• $\forall x \in]0, 1[, \quad g'(x) \geq 0 \iff \ln(1-x) \geq \ln x \iff 1-x \geq x \iff x \leq \frac{1}{2}$.

D'où le tableau de variations de g :

x	0	1/2	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	$\ln 2$	0

h étant continue sur $[0, +\infty[$, la fonction g est continue sur $[0, 1]$.

On a alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = -h(0) - h(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = g(1) = 0$.

Enfin, $g(1/2) = -2h\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \times \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$.

Partie II

3) $U \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ donc $\forall i \in [1, n], P(U = i) = \frac{1}{n}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} H(U) &= - \sum_{i=1}^n h\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times \ln n \quad \text{car } \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln n \\ &= n \times \frac{1}{n} \times \ln n \quad \text{car les } n \text{ termes de la somme sont égaux} \\ &= \ln n. \end{aligned}$$

4) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ donc $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.

On a alors :

$$H(X) = -h(p) - h(1-p) = g(p).$$

D'après la question 2), la fonction g admet un maximum égal à $\ln 2$ atteint en $1/2$.

Donc $H(X) \leq \ln 2$ et $H(X) = \ln 2 \iff p = \frac{1}{2}$.

5)a) Comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = [0, 1]$, alors $(X_1 + X_2)(\Omega) = [0, 2]$.

$$\begin{aligned} \text{b) } p &= P(Z = 1) \\ &= P(X_1 + X_2 = 1) \\ &= P((X_1 = 1 \cap X_2 = 0) \cup (X_1 = 0 \cap X_2 = 1)) \\ &= P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) + P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) \quad \text{par incompatibilité} \\ &= P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) \quad \text{par indépendance} \\ &= p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1). \end{aligned}$$

c) D'une part, on a :

$$1 - 2p = 1 - 2p_1(1 - p_2) - 2p_2(1 - p_1) = 1 - 2p_1 - 2p_2 + 4p_1p_2.$$

D'autre part, on a en développant :

$$(1 - 2p_1)(1 - 2p_2) = 1 - 2p_1 - 2p_2 + 4p_1p_2.$$

$$\text{Donc } 1 - 2p = (1 - 2p_1)(1 - 2p_2).$$

6)a) S_n est une somme de n variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{B}(p)$, c'est-à-dire la loi binomiale $\mathcal{B}(1, p)$.

D'après le cours, $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(\underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}}, p)$. Donc $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

b) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $\ll 1 - 2P(Z_n = 1) = (1 - 2p)^n \gg$.

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

$\mathcal{P}(1)$ s'écrit : $\ll 1 - 2P(Z_1 = 1) = 1 - 2p \gg$.

Or, $P(Z_1 = 1) = P(S_1 \text{ est impair}) = P(X_1 \text{ est impair}) = P(X_1 = 1) = p$.

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

L'idée est d'utiliser la question 5)b) et l'égalité $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
 &P(Z_{n+1} = 1) \\
 &= P(S_{n+1} \text{ est impair}) \\
 &= P(S_n + X_{n+1} \text{ est impair}) \\
 &= P((S_n \text{ est impair et } X_{n+1} \text{ est pair}) \cup (S_n \text{ est pair et } X_{n+1} \text{ est impair})) \\
 &= P((Z_n = 1 \cap X_{n+1} = 0) \cup (Z_n = 0 \cap X_{n+1} = 1)) \\
 &= P(Z_n + X_{n+1} \text{ est impair}).
 \end{aligned}$$

Pour poursuivre, remarquons que $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et que $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ sont mutuellement indépendantes.

D'après le lemme des coalitions, toute fonction de certaines des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ est indépendante de toute fonction des autres.

C'est pourquoi S_n et X_{n+1} sont indépendantes.

Cette indépendance entraîne immédiatement l'indépendance de Z_n et X_{n+1} , puisque Z_n est construite à l'aide de S_n .

Comme Z_n et X_{n+1} sont indépendantes et suivent des lois de Bernoulli, on est dans le cadre de la question 5) avec :

$$\begin{aligned}
 X_1 &\rightarrow Z_n, p_1 = P(Z_n = 1), \\
 X_2 &\rightarrow X_{n+1}, p_2 = P(X_{n+1} = 1) = p, \\
 Z &\rightarrow Z_n + X_{n+1} \text{ et } p = P(Z_{n+1} = 1).
 \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
 &P(Z_{n+1} = 1) \\
 &= P(S_n \text{ est impair})P(X_{n+1} = 0) + P(S_n \text{ est pair})P(X_{n+1} = 1) \\
 &= P(Z_n = 1)P(X_{n+1} = 0) + P(Z_n = 0)P(X_{n+1} = 1).
 \end{aligned}$$

La question 5)c) donne alors :

$$\begin{aligned}
 1 - 2P(Z_{n+1} = 1) &= (1 - 2P(Z_n = 1))(1 - 2p) \\
 &= (1 - 2p)^n(1 - 2p) \\
 &= (1 - 2p)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*, 1 - 2P(Z_n = 1) = (1 - 2p)^n$.

c) Comme Z_n suit une loi de Bernoulli, la question 4) s'applique.

On a donc $H(Z_n) \leq \ln 2$.

$$\text{Enfin, } H(Z_n) = \ln 2 \iff P(Z_n = 1) = \frac{1}{2} \iff (1 - 2p)^n = 0 \iff p = \frac{1}{2}.$$

Partie III

7)a) $U \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$. Une densité de U est la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Or, $h(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Par composée, on a :

$$(h \circ f)(t) = \begin{cases} f(t) \ln f(t) & \text{si } f(t) > 0 \\ 0 & \text{si } f(t) = 0 \\ \frac{1}{b-a} \ln \left(\frac{1}{b-a} \right) & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Ou encore, } (h \circ f)(t) = \begin{cases} -\frac{\ln(b-a)}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\int_{-\infty}^a |(h \circ f)(t)| dt$ et $\int_b^{+\infty} |(h \circ f)(t)| dt$ convergent et valent 0 puisque $|h \circ f|$ est nulle sur $] -\infty, a[$ et $]b, +\infty[$.

Enfin, $\int_a^b |(h \circ f)(t)| dt$ converge car ce n'est pas une intégrale impropre du fait que la fonction $|h \circ f|$ est constante donc continue sur $[a, b]$.

D'après la relation de Chasles, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |(h \circ f)(t)| dt$ converge.

Donc U admet une entropie.

$$\begin{aligned} \text{b) } H(U) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} (h \circ f)(t) dt \\ &= - \int_{-\infty}^a (h \circ f)(t) dt - \int_a^b (h \circ f)(t) dt - \int_b^{+\infty} (h \circ f)(t) dt \\ &= 0 + \int_a^b \frac{\ln(b-a)}{b-a} dt - 0 \\ &= \ln(b-a). \end{aligned}$$

8)a) $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Une densité de X est la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après le cours, X admet une espérance égale à $\frac{1}{\lambda}$ et donnée par :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \underbrace{t f(t)}_{=0} dt + \int_0^{+\infty} t f(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} t f(t) dt. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \frac{1}{\lambda}.$$

b)• Par composée, on a :

$$(h \circ f)(t) = \begin{cases} f(t) \ln f(t) & \text{si } f(t) > 0 \\ 0 & \text{si } f(t) = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(t) \ln (\lambda e^{-\lambda t}) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis, $\forall t \geq 0$, $f(t) \ln (\lambda e^{-\lambda t}) = f(t) (\ln \lambda + \ln (e^{-\lambda t})) = (\ln \lambda) f(t) - \lambda t f(t)$.

$$\text{Donc } (h \circ f)(t) = \begin{cases} (\ln \lambda) f(t) - \lambda t f(t) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

• Comme $h \circ f$ est nulle sur $] -\infty, 0[$, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 |(h \circ f)(t)| dt$ converge.

$\forall t \geq 0$, $|(h \circ f)(t)| = |(\ln \lambda) f(t) - \lambda t f(t)| \leq |(\ln \lambda) f(t)| + |\lambda t f(t)|$ grâce à l'inégalité triangulaire.

$$\text{Et } \forall t \geq 0, |(\ln \lambda) f(t)| + |\lambda t f(t)| = |(\ln \lambda)| |f(t)| + |\lambda| |t f(t)|$$

$$= |\ln \lambda| f(t) + \lambda t f(t).$$

Ainsi, $\forall t \geq 0$, $|(h \circ f)(t)| \leq |\ln \lambda| f(t) + \lambda t f(t) \quad (*)$

Les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ convergent.

Par combinaison linéaire, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 (|\ln \lambda| f(t) + \lambda t f(t)) dt$ converge.

L'inégalité (*) permet d'utiliser alors le critère de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives et de conclure que $\int_0^{+\infty} |(h \circ f)(t)| dt$ converge.

Enfin, par Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} |(h \circ f)(t)| dt$ converge. Donc X admet une entropie.

$$\bullet H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} (h \circ f)(t) dt$$

$$= - \int_{-\infty}^0 \underbrace{(h \circ f)(t)}_{=0} dt - \int_0^{+\infty} (h \circ f)(t) dt$$

$$= 0 - \int_0^{+\infty} ((\ln \lambda) f(t) - \lambda t f(t)) dt$$

$$= -\ln \lambda \int_0^{+\infty} f(t) dt + \lambda \int_0^{+\infty} t f(t) dt$$

$$= -\ln \lambda \times 1 + \lambda \times \frac{1}{\lambda}$$

$$= 1 - \ln \lambda.$$

9)a) $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Le cours donne : $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$.

Comme X admet une variance, alors X^2 admet une espérance donnée par le théorème de transfert :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \Phi(t) dt.$$

De plus, la formule de Koënnig donne : $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = \sigma^2 + m^2$.

$$\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \Phi(t) dt = \sigma^2 + m^2.$$

b) D'après le cours, on a : $\forall t \in \mathbf{R}, \Phi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2}$.

Par composée, on a :

$$(h \circ \Phi)(t) = \begin{cases} \Phi(t) \ln \Phi(t) & \text{si } \Phi(t) > 0 \\ 0 & \underbrace{\text{si } \Phi(t) = 0}_{\text{impossible}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \forall t \in \mathbf{R}, (h \circ \Phi)(t) &= \Phi(t) \ln \Phi(t) \\ &= \Phi(t) \ln \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} \right) \\ &= \Phi(t) \left(\ln \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{t-m}{\sigma} \right)^2 \right) \\ &= \Phi(t) \left(-\ln \sqrt{2\pi\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2} (t-m)^2 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \Phi(t) - \frac{1}{2\sigma^2} (t-m)^2 \Phi(t). \end{aligned}$$

On déduit $\forall t \in \mathbf{R}, |(h \circ \Phi)(t)| = \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \Phi(t) + \frac{1}{2\sigma^2} (t-m)^2 \Phi(t)$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} (t-m)^2 \Phi(t) dt$ convergent, cette dernière intégrale étant égale par le théorème de transfert à l'espérance de $((X - E(X))^2$, c'est-à-dire à la variance de X .

Par combinaison linéaire, $\int_{-\infty}^{+\infty} |(h \circ \Phi)(t)| dt$ converge.

Donc X admet une entropie donnée par :

$$\begin{aligned} H(X) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} (h \circ \Phi)(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \Phi(t) + \frac{1}{2\sigma^2} (t-m)^2 \Phi(t) \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) dt + \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-m)^2 \Phi(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \times 1 + \frac{1}{2\sigma^2} \times V(X) \\ &= \frac{1 + \ln(2\pi\sigma^2)}{2}. \end{aligned}$$